Programowanie liniowe

Dualizm

- Dualizm w programowaniu liniowym
- Zasady tworzenia programu dualnego
- Standardowa para dualna

DUALIZM W PROGRAMOWANIU LINIOWYM

Z każdym programem liniowym sprzężony jest pewien inny program, nazywany *programem dualnym*.

Jeżeli programem pierwotnym jest

$$
(1) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{max} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, \ldots, m), \\ x_j \geqslant 0 \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}
$$

to programem dualnym będzie program

$$(2) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \text{min} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j = 1, \dots, n), \\ y_i \geqslant 0 \qquad\qquad\quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

i na odwrót.

W zapisie macierzowym powyższe twierdzenie przyjmuje postać:

Jeżeli programem pierwotnym jest

$$(1) \quad \begin{cases} c^T x \to \mathsf{max} \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

to programem dualnym będzie program

$$(2) \quad \begin{cases} b^T y \to \mathsf{min} \\ A^T y \geqslant c \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

i na odwrót.

Uwaga 1. Programy (1) i (2) tworzą tzw. *standardową parę programów dualnych*. Rozwiązanie jednego z nich pozwala skonstruować rozwiązanie drugiego (i na odwrót).

Uwaga 2. (TERMINOLOGIA)
Nierówność „$\leqslant$" w warunku ograniczającym (nie brzegowym!) nazywamy *nierównością typową* dla problemu maksymalizacji i *nierównością nietypową* dla problemu minimalizacji.

Natomiast nierówność „$\geqslant$" w warunku ograniczającym nazywamy *nierównością typową* dla problemu minimalizacji i *nierównością nietypową* dla problemu maksymalizacji.

Warunki brzegowe: $x_j \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$ nazywamy *typowym ograniczeniem zmiennych* decyzyjnych.

Natomiast warunki brzegowe: $x_j \leqslant 0$, $y_i \leqslant 0$ nazywamy *nietypowym ograniczeniem zmiennych* decyzyjnych.

(Ostatnie dwie uwagi dotyczą zarówno problemów minimalizacji jak i maksymalizacji!)

Uwaga 3. Zauważmy, że w programach (1) i (2), tworzących standardową parę dualną, wszystkie ograniczenia są typowe.

Uwaga 4. Znalezienie programu dualnego do programu liniowego o postaci bardziej skomplikowanej niż te tworzące standardową parę dualną jest oczywiście trudniejsze, ale zawsze możliwe przez zastosowanie podanych niżej zasad.

ZASADY TWORZENIA PROGRAMU DUALNEGO

Przyjmijmy skrótowe oznaczenia:
PP - program pierwotny, PD - program dualny.

1. Każdemu warunkowi ograniczającemu (oprócz brzegowych) w PP odpowiada zmienna decyzyjna w PD.
2. Każdej zmiennej decyzyjnej w PP odpowiada warunek ograniczający w PD.

3. Wagi funkcji celu w PP są wyrazami wolnymi w PD.
4. Wyrazy wolne w PP są wagami funkcji celu w PD.

5. Macierz ograniczeń w PD jest transpozycją macierzy ograniczeń w PP.

6. Jeżeli PP jest problemem maksymalizacji, to PD jest problemem minimalizacji - i na odwrót.

7. Jeżeli w PP i-ty warunek ograniczający jest równością, to w PD odpowiadająca mu i-ta zmienna dualna nie ma ograniczeń, tzn. $y_i \in \mathbb{R}$.

8. Jeżeli w PP na j-tą zmienną x_j nie nałożono ograniczeń, tzn. $x_j \in \mathbb{R}$, to w PD odpowiadający jej j-ty warunek ograniczający jest równością.

9. Jeżeli w PP i-ty warunek ograniczający jest typową (nietypową) nierównością, to w PD odpowiadająca mu i-ta zmienna dualna ma typowe (nietypowe) ograniczenie, tzn. $y_i \geqslant 0$ ($y_i \leqslant 0$).
10. Jeżeli w PP j-ta zmienna x_j ma typowe (nietypowe) ograniczenie, tzn. $x_j \geqslant 0$ ($x_j \leqslant 0$), to w PD odpowiadający jej j-ty warunek ograniczający jest typową (nietypową) nierównością.

Dla programu:

$$(3) \qquad \begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \to \text{max} \\ 4x_1 + 6x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \geqslant 1 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \text{ - dowolne.} \end{cases}$$

program dualny ma postać:

$$(4) \qquad \begin{cases} 10y_1 + 4y_2 + y_3 \to \text{min} \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geqslant 6 \\ 6y_1 + y_2 + 2y_3 = 8 \\ y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \text{ - dowolne,} \quad y_3 \leqslant 0. \end{cases}$$

WŁASNOŚCI PROGRAMÓW TWORZĄCYCH STANDARDOWĄ PARĘ DUALNĄ

Twierdzenie 1. *Jeżeli zarówno PP jak i PD mają rozwiązania dopuszczalne (tzn. są to programy niesprzeczne), to obydwa mają rozwiązania optymalne.*

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest rozwiązaniem dopuszczalnym programu (1), a* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *rozwiązaniem dopuszczalnym programu (2), to między wartościami funkcji celu dla tych rozwiązań zachodzi nierówność:*

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} b_i y_i. \tag{5}$$

Twierdzenie 3. *Jeżeli w nierówności (5) zachodzi równość, to rozważane rozwiązania dopuszczalne są rozwiązaniami optymalnymi, tzn.* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest rozwiązaniem optymalnym programu (1), a* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *jest rozwiązaniem optymalnym programu (2).*

Twierdzenie 4. *(*O KOMPLENTARNOSCI*) Jeżeli* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jest rozwiązaniem dopuszczalnym programu (1), a* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *rozwiązaniem dopuszczalnym programu (2), to aby te rozwiązania były optymalnymi wystarcza, żeby spełnione były warunki:*

$$(i) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \implies y_i = 0, \qquad (ii) \quad y_i > 0 \implies \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,$$

$$(iii) \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i > c_j \implies x_j = 0, \qquad (iv) \quad x_j > 0 \implies \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j.$$

Uwaga 5. Jeżeli nierówności w warunkach ograniczających sa dla pewnego rozwiązania dopuszczalnego ostre, to mówimy że warunki te są *nieaktywne* dla tego rozwiązania (tak jest w punktach (i) oraz (iii)). Jeżeli zaś warunki ograniczające sa spełnione jako równości (tak jak w punktach (ii) oraz (iv)), to mówimy, że sa one *aktywne* dla danego rozwiązania dopuszczalnego.

Przykład 1.

Rozwiązać poniższy program liniowy stosując metodę graficzną i wykorzystując dualizm:

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \text{min} \\ x_1 + x_2 \geqslant 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Przeprowadzić analizę postoptymalizacyjną.