Równania różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego

Wykład

- Równania o zmiennych rozdzielonych
- Równania liniowe jednorodne i niejednorodne, metoda uzmienniania stałej i metoda przewidywań
- Równanie Bernoulliego
- Równania rozwiązalne metodą podstawienia

Definicja 1. (*równanie różniczkowe*)
Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci:

$$F(x, y, y') = 0,$$

w którym y' występuje istotnie, pozostałe zaś argumenty, tzn. x i y, mogą występować, lecz nie muszą.

Przykład 1. *Poniższe równania są przykładami równań różniczkowych:*

$$y' = 2xy^2 - xy', \quad x^2y' = \sin\frac{1}{x}, \quad y' = 2y.$$

Definicja 2. (*rozwiązanie równania różniczkowego*)
Rozwiązaniem (całką) równania różniczkowego nazywamy każdą funkcję różniczkowalną

$$y = \varphi(x),$$

która spełnia dane równanie dla każdej wartości x z pewnego przedziału.

Definicja 3. (*linia całkowa*)
Linią (krzywą) całkową równania różniczkowego nazywamy wykres każdej funkcji, która jest rozwiązaniem (całką) tego równania.

Definicja 4. (*rozwiązanie ogólne*)
Rozwiązaniem ogólnym (całką ogólną) równania różniczkowego nazywamy każdą taką funkcję postaci:

$$y = \psi(x, C),$$

która dla każdej wartości C jest rozwiązaniem równania.

Definicja 5. (*rozwiązanie szczególne*)
Rozwiązaniem szczególnym (całką szczególną) równania różniczkowego nazywamy rozwiązanie otrzymane przez nadanie parametrowi C pewnej stałej wartości (z jego dziedziny).

Przykład 2. *Dla równania różniczkowego*

$$y' = 2y$$

rozwiązaniem ogólnym jest

$$y = Ce^{2x},$$

gdzie C jest dowolną liczbą rzeczywistą. Nadając parametrowi C pewne wartości, np. $-3, 0, 1, 5$ *otrzymujemy rozwiązania szczególne*

$$y = -3e^{2x}, \quad y = 0, \quad y = e^{2x}, \quad y = 5e^{2x}.$$

Uwaga 1. (*warunki początkowe*)
W wielu zagadnieniach (szczególnie fizycznych i technicznych) często wynika potrzeba wyznaczania rozwiązania szczególnego, spełniającego tzw. *warunki początkowe*. Polegają one na wyznaczeniu spośród linii całkowych danego równania różniczkowego takiej linii, która przechodzi przez z góry zadany punkt (x_0, y_0). Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia wartości C_0 parametru C z równania

$$y_0 = \psi(x_0, C_0).$$

Po podstawieniu otrzymanej wartości C_0 do rozwiązania ogólnego otrzymujemy rozwiązanie szczególne

$$y = \psi(x, C_0).$$

Przykład 3. *Aby znaleźć całkę szczególną równania z Przykładu 2 spełniającą warunki początkowe takie, że dla $x = 0$ mamy $y = 4$, podstawiamy do rozwiązania ogólnego tego równania $x = 0, y = 4$, skąd otrzymujemy $C_0 = 4$. Zatem poszukiwaną całką szczególną jest*

$$y = 4e^{2x}.$$

Definicja 6. (*rozwiązanie osobliwe*)
Rozwiązaniem osobliwym (całką osobliwą) równania różniczkowego nazywamy takie rozwiązanie tego równania, którego nie można otrzymać z rozwiązania ogólnego przy żadnej wartości parametru C.

Uwagi ogólne o rozdzielaniu zmiennych

Definicja 7. (*równanie o zmiennych rozdzielonych*)
Równaniem o zmiennych rozdzielonych nazywamy równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego postaci

$$p(y)\frac{dy}{dx} = q(x). \tag{1}$$

Twierdzenie 1. *(*rozwiązanie równania o zmiennych rozdzielonych*)*
Jeżeli $p(y)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu y, przy czym $p(y) \neq 0$, a $q(x)$ jest funkcją ciągłą w otoczeniu punktu x, to istnieje na płaszczyźnie OXY takie otoczenie punktu (x, y), że przez każdy punkt (x_1, y_1) tego otoczenia przechodzi dokładnie jedna linia całkowa równania różniczkowego (1) określona równaniem $y = f(x)$, przy czym funkcja f ma ciągłą pochodną.

Funkcja ta dana jest wtedy jednoznacznie w formie uwikłanej równaniem

$$\int_{y_1}^{y} p(\eta)d\eta = \int_{x_1}^{x} q(\xi)d\xi.$$

Ćwiczenie 1. *Rozwiąż równania:*

a) $x^2 \dfrac{dy}{dx} = \sin \dfrac{1}{x}$;

b) $\sin^2 x + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1$;

c) $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 - x^2 \dfrac{dy}{dx}$;

d) $\sin x \dfrac{dy}{dx} = y \cos x$.

Definicja 8. (*równanie liniowe rzędu pierwszego*)
Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

liniowe względem y i y', nazywamy równaniem liniowym rzędu pierwszego. Jeżeli $q(x) \equiv 0$, to równanie nazywamy jednorodnym względem y i y' (lub uproszczonym), w przypadku przeciwnym - równaniem niejednorodnym (lub równaniem w postaci ogólnej).

Twierdzenie 2. *(*CORJ - całka ogólna równania jednorodnego*)*
Rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

jest postaci

$$y = Ce^{-P(x)},$$

gdzie $P(x)$ *oznacza funkcję pierwotną funkcji* $p(x)$ *a* C *- dowolną stałą rzeczywistą.*

Uwaga 2. Powyższe rozwiązanie uzyskujemy stosując rozdzielanie zmiennych do danego równania liniowego jednorodnego.

Ćwiczenie 2. *Rozwiąż równania różniczkowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3x}y,$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x-1}{x^2}y,$

c) $\dfrac{dy}{dx} = y \tan x.$

Twierdzenie 3. *(*CORN - całka ogólna równania niejednorodnego*)*
Jeżeli rozwiązanie ogólne (CORJ) równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

nie jest funkcją tożsamościowo równą zero, to rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego, co symbolicznie zapisujemy w postaci:

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSzRN}.$$

Twierdzenie 4. *(*wyznaczenie CSzRN metodą uzmienniania stałej*)*
Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

jest postaci

$$\overline{y} = C(x)e^{-P(x)},$$

gdzie $C(x)$ *(uzmienniona stała) oznacza pewną funkcję zmiennej* x*, a* $P(x)$ *- funkcję pierwotną funkcji* $p(x)$*.*

Ćwiczenie 3. *Rozwiązać równania różniczkowe liniowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} - xy = xe^{x^2}$,

b) $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^3$,

c) $\dfrac{dy}{dx}\sin x + y\cos x = \sin 2x$,

d) $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = x^3\cos x$.

Twierdzenie 5. *(*wyznaczanie CSzRN metodą przewidywania*)*
Rozwiązanie szczególne równania typu

$$y' + ay = be^{cx},$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$ *są stałe jest postaci*

$$\overline{y} = me^{cx},$$

gdzie m *oznacza odpowiednio dobraną stałą rzeczywistą.*

Ćwiczenie 4. *Rozwiązać równania różniczkowe liniowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 2e^{3x}$,

b) $\dfrac{dy}{dx} - 4y = 2e^{4x}$.

Twierdzenie 6. *(*wyznaczanie CSzRN metodą przewidywania*)*
Rozwiązanie szczególne równania typu

$$y' + ay = W_n(x),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ *jest stałą, a* $W_n(x)$ *- wielomianem stopnia* n*, przewidujemy w postaci wielomianu stopnia* n*.*

Ćwiczenie 5. *Rozwiązać równania różniczkowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2$,

b) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 3x^2 - 2x^3$.

Twierdzenie 7. *(*wyznaczanie CSzRN metodą przewidywania*)*
Rozwiązanie szczególne równania typu

$$y' + by = c \sin ax + d \cos ax,$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *są stałe, jest postaci*

$$\overline{y} = m \sin ax + n \cos ax,$$

gdzie $m, n \in \mathbb{R}$ *są stałe.*

Ćwiczenie 6. *Rozwiązać równania:*

a) $\dfrac{dy}{dx} + 2y = 5\cos x$,

b) $\dfrac{dy}{dx} + y = 5\sin 3x$.

Uwaga 3. Wadą metody przewidywań jest niepewność dojścia do celu, zaletą - szybkie otrzymanie wyniku i uniknięcie żmudnych nieraz całkowań.

Ćwiczenie 7. *Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego*

$$y' - 2y + 3 = 0$$

przechodzącą przez punkt $(0, 1)$.

Ćwiczenie 8. *Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego*

$$y' - 5y = e^{5x}$$

przechodzącą przez punkt $(\frac{1}{5}, e)$.

Ćwiczenie 9. *Znaleźć krzywą całkową równania różniczkowego*

$$y' + y = \sin x$$

przechodzącą przez punkt $(\pi, \frac{1}{2})$.

Równania różniczkowe innych typów.

Ćwiczenie 10. *Rozwiązać równania różniczkowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} - y = xe^{2x}$,

b) $\dfrac{dy}{dx} + y = 2x \sin x$,

c) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 6(\cos 2x - \sin 2x)e^{4x}$.

Twierdzenie 8. *Rozwiązanie ogólne równania postaci*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q_1(x) + q_2(x)$$

jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

oraz rozwiązań szczególnych równań niejednorodnych

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q_1(x) \quad \textit{i} \quad \frac{dy}{dx} + p(x)y = q_2(x),$$

co symbolicznie zapisujemy w postaci:

$$\mathsf{CORN} = \mathsf{CORJ} + \mathsf{CSzRN}_1 + \mathsf{CSzRN}_2.$$

Ćwiczenie 11. *Rozwiązać równania różniczkowe liniowe:*

a) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 6\cos 2x - 2\sin 2x + x - 2x^3$,

b) $\dfrac{dy}{dx} + y = (x+1)\sin 3x + 3x\cos 3x + x^2 - 2 + 2xe^{-x}$.

Definicja 9. (*równanie Bernoulliego*)
Równaniem różniczkowym Bernoulliego nazywamy równanie postaci

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^n = 0,$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe w pewnym wspólnym przedziale, a n jest ustaloną liczbą naturalną.

Uwaga 4. Dla $n = 0$ z równania Bernoulliego otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe. Dla $n = 1$ otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe jednorodne względem y i y', a więc równanie w którym zmienne dadzą się rozdzielić. Zauważmy, że przy $n > 0$ całką równania Bernoulliego jest zawsze $y = 0$.

Twierdzenie 9. *(*algorytm rozwiązania równania Bernoulliego*)* *Równanie Bernoulliego przez podstawienie*

$$y^{1-n} = z$$

sprowadza się do równania różniczkowego liniowego.

Ćwiczenie 12. *Rozwiązać równania:*
a) $y' + y + y^2 \sin x = 0$,
b) $y' + y + x\sqrt{y} = 0$.

Równania różniczkowe rzędu pierwszego rozwiązywalne metodą postawienia.

1. Równanie różniczkowe typu

$$y' = f(ax + by + c),$$

gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$ i f jest funkcją ciągłą, rozwiązujemy stosując podstawienie:

$$u = ax + by + c.$$

Ćwiczenie 13. *Rozwiązać równania:*
a) $y' = (8x + 2y + 6)^2$,
b) $y' = \dfrac{1}{x + y - 1}$.

2. Równanie różniczkowe typu

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

rozwiązujemy stosując podstawienie:

$$u = \frac{y}{x}.$$

Ćwiczenie 14. *Wyznacz rozwiązanie równania* $xy' - y \ln\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, *które spełnia warunek* $y(1) = e^2$.

Ćwiczenie 15. *Znajdź rozwiązanie równania* $xy' - y = x \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ *z warunkiem początkowym* $y(2) = \pi$.