1 *Laboratorium do wykładu 2*

Wszystkie ćwiczenia pochodzą z wykładu.

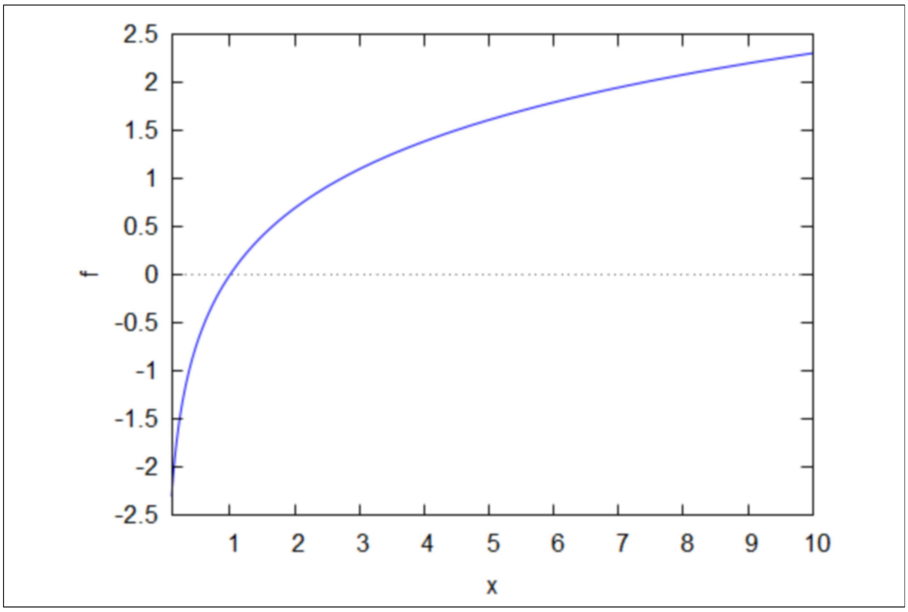
1.1 Wzór Taylora

Ćwiczenie 3. Podać wzór Taylora dla funkcji
f(x)=lnx,
przyjmując a=1, b=2, c=1.

Rozwiązanie: Dane jest a=1 i b=2, więc mamy podać wzór Taylora dla x z przedziału [1,2]. W tym przedziale funkcja logarytmiczna jest ciągła i ponadto c=1 też zawiera się w tym przedziale, więc założenia twierdzenia 4 (str. 4) są spłenione.

Narysujmy wykres funkcji logarytm naturalny (przypomnę, że w Maximie taką funkcję zapisujemy jako log(x)).

```
f(x):=log(x);
```
(%o1) f(x):=log(x)

```
wxplot2d([f], [x,0.1,10])$
```
(%t2) 

Wzór Taylora podaje wielomian stopnia n, który przybliża daną funkcję. Oznaczmy go przez w[n](x). W zadaniu nie jest określony jego stopień, więc na początek przyjmijmy n=5. Zazwyczaj czym wyższy stopień (więcej składników wielomianu) tym mamy lepsze przybliżenie.

```
c:1;
```
(c) 1

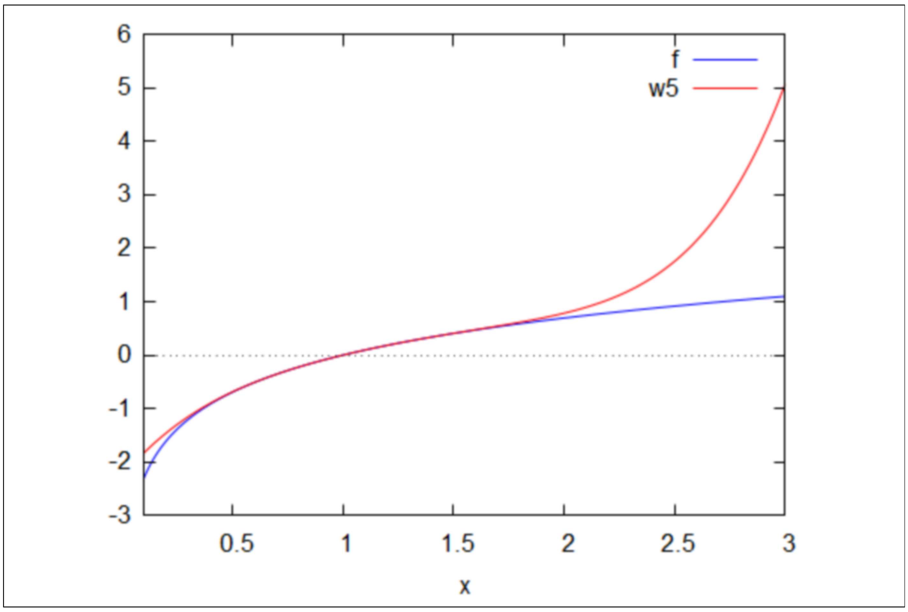
```
w5(x):=''(taylor(f(x),x,c,5));
```

(%o27)/T/ $w5(x):=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}+...$

Narysujmy wykres tego wielomianu razem z funkcją f.

```
wxplot2d([f,w5], [x,0.1,3])$
```

(%t28)



Zwiększmy długość rozwinięcia

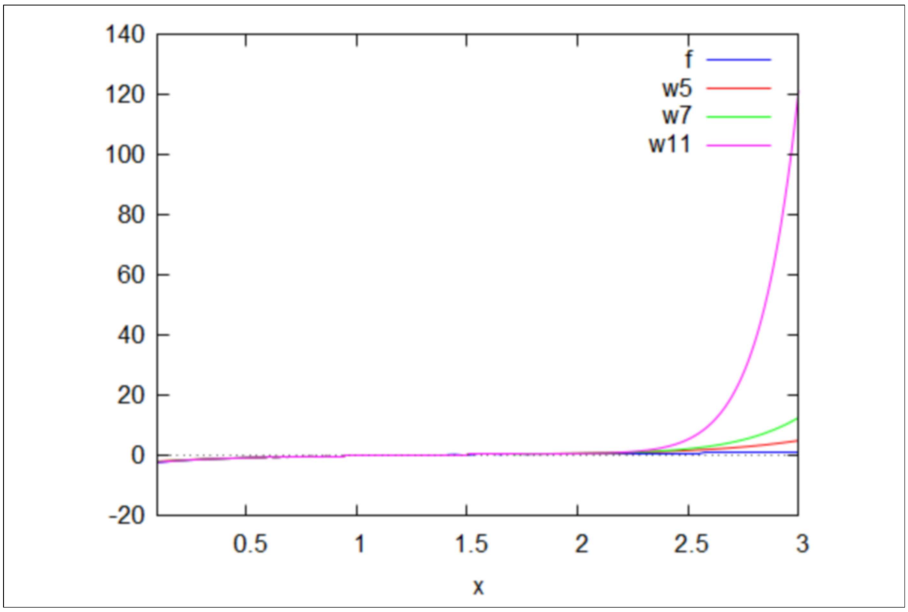
```
w7(x):=''(taylor(f(x),x,c,7));
w11(x):=''(taylor(f(x),x,c,11));
```

(%o29)/T/ $w7(x):=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}+...$

(%o30)/T/ $w11(x):=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^7}{7}-\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^9}{9}-\frac{(x-1)^{10}}{10}+\frac{(x-1)^{11}}{11}+...$

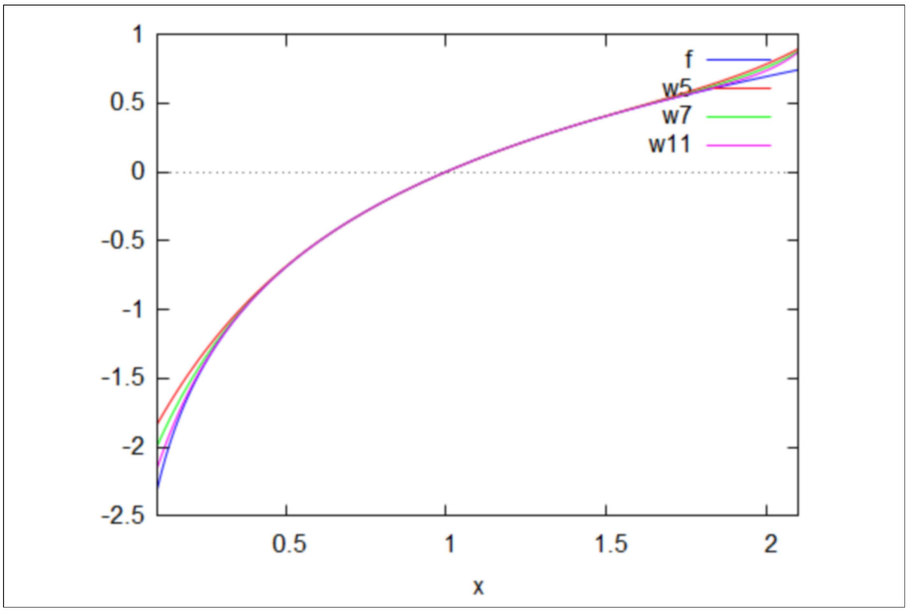
I narysujmy to razem.

→ wxplot2d([f,w5,w7,w11], [x,0.1,3])$

(%t31) 

Mało widać, więc skróćmy przedział.

→ wxplot2d([f,w5,w7,w11], [x,0.1,2.1])$

(%t39) 

Widać, że w przedziale [1,2] wraz ze wzrostem stopnia wielomiany lepiej przybliżają logarytm (wykresy sa coraz bliżej wykresu funkcji logarytmicznej).

Ćwiczenie 4.

Tworzymy funkcje odpowiadające równaniom. W tym celu przenosimy wszystko na jedną stronę.

(%i2) f1(x1,x2):=2·x1−x2+1/9·%e^(−x1)−1;
f2(x1,x2):=−x1+2·x2+1/9·%e^(−x2);

(%o1) $f1(x1,x2):=2\,x1-x2+\frac{1}{9}\%e^{-x1}-1$

(%o2) $f2(x1,x2):=-x1+2\,x2+\frac{1}{9}\%e^{-x2}$

Obliczamy jacobian J (str.12).

(%i3) J(x1,x2):=''(jacobian([f1(x1,x2),f2(x1,x2)],[x1,x2]));

(%o3) $J(x1,x2):=\begin{pmatrix} 2-\frac{\%e^{-x1}}{9} & -1 \\ -1 & 2-\frac{\%e^{-x2}}{9} \end{pmatrix}$

Przyjmujemy początkowe rozwiązanie (1,1).

(%i5) x1:1;
x2:1;

(x1) 1

(x2) 1

Obliczamy macierz jednokolumnową [h1,h2] poprawek (str. 13).

(%i6) H:−invert(J(x1,x2)).matrix([f1(x1,x2)],[f2(x1,x2)]);

(H) $$\begin{pmatrix} -\frac{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)\%e^{-1}}{9\left(\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^2-1\right)}-\frac{\frac{\%e^{-1}}{9}+1}{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^2-1} \\ -\frac{\%e^{-1}}{9\left(\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^2-1\right)}-\frac{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)\left(\frac{\%e^{-1}}{9}+1\right)}{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^2-1} \end{pmatrix}$$

Wypisujemy obliczone poprawki:

(%i8) h1:H[1,1];
h2:H[2,1];

(h1) $$-\frac{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)\%e^{-1}}{9\left(\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^{2}-1\right)}-\frac{\frac{\%e^{-1}}{9}+1}{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^{2}-1}$$

(h2) $$-\frac{\%e^{-1}}{9\left(\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^{2}-1\right)}-\frac{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)\left(\frac{\%e^{-1}}{9}+1\right)}{\left(2-\frac{\%e^{-1}}{9}\right)^{2}-1}$$

i rozwinięcia dziesiętne tych poprawek:

(%i10) h1:H[1,1],numer;
h2:H[2,1],numer;

(h1) −0.3949573618530939

(h2) −0.7328951531799095

Mamy teraz wszystko, żeby podać drugie przybliżenie rozwiązania (str. 14):

(%i12) x1:x1+h1;
x2:x2+h2;

(x1) 0.6050426381469061

(x2) 0.2671048468200905

Sprawdzamy czy kryterium stopu jest spełnione (str. 15):

(%i13) max(abs(h1),abs(h2));

(%o13) 0.7328951531799095

Kryterium stopu nie jest spełnione, więc zaczynamy iterowanie, tzn. kontynuujemy rachunki dla nowego (drugiego) przybliżenia. Zbierzmy wszystko czego potrzeba do jednego wejścia.

(%i19)
```
H:-invert(J(x1,x2)).matrix([f1(x1,x2)],[f2(x1,x2)]);
h1:H[1,1],numer;
h2:H[2,1],numer;
x1:x1+h1;
x2:x2+h2;
max(abs(h1),abs(h2));
```

(H) $\begin{pmatrix} -0.0078224830117466 \\ -0.01151757884662652 \end{pmatrix}$

(h1) -0.0078224830117466

(h2) -0.01151757884662652

(x1) 0.5972201551351595

(x2) 0.255587267973464

(%o19) 0.01151757884662652

(%i25)
```
H:-invert(J(x1,x2)).matrix([f1(x1,x2)],[f2(x1,x2)]);
h1:H[1,1],numer;
h2:H[2,1],numer;
x1:x1+h1;
x2:x2+h2;
max(abs(h1),abs(h2));
```

(H) $\begin{pmatrix} -3.403373523712009\ 10^{-6} \\ -4.737476825217359\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

(h1) $-3.403373523712009\ 10^{-6}$

(h2) $-4.737476825217359\ 10^{-6}$

(x1) 0.5972167517616358

(x2) 0.2555825304966388

(%o25) $4.737476825217359\ 10^{-6}$

(%i31)
```
H:-invert(J(x1,x2)).matrix([f1(x1,x2)],[f2(x1,x2)]);
h1:H[1,1],numer;
h2:H[2,1],numer;
x1:x1+h1;
x2:x2+h2;
max(abs(h1),abs(h2));
```

(H) $\begin{pmatrix} -6.062461336562779\ 10^{-13} \\ -8.212597612774688\ 10^{-13} \end{pmatrix}$

(h1) $-6.062461336562779\ 10^{-13}$

(h2) $-8.212597612774688\ 10^{-13}$

(x1) 0.5972167517610295

(x2) 0.2555825304958175

(%o31) $8.212597612774688\ 10^{-13}$

Mamy osiągniętą zadaną dokładność, zatem kończymy rachunki. Rozwiązaniem numerycznym jest:

(%i33)
```
x1;
x2;
```

(%o32) 0.5972167517610295

(%o33) 0.2555825304958175

(%i22)
```
kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 5.

Funkcje odpowiadające równaniom są tutaj postaci:

(%i3)
```
f1(x,y,z):=x·y−z^2−1;
f2(x,y,z):=x·y·z−x^2+y^2−2;
f3(x,y,z):=%e^x−%e^y+z−3;
```

(%o1) $\mathrm{f1}(x,y,z):=x\,y-z^2-1$

(%o2) $\mathrm{f2}(x,y,z):=x\,y\,z-x^2+y^2-2$

(%o3) $\mathrm{f3}(x,y,z):=\%e^x-\%e^y+z-3$

Obliczam jakobian:

(%i4)
```
J(x,y,z):=''(jacobian([f1(x,y,z),f2(x,y,z),f3(x,y,z)],[x,y,z]));
```

(%o4) $$J(x,y,z):=\begin{pmatrix} y & x & -2\,z \\ y\,z-2\,x & x\,z+2\,y & x\,y \\ \%e^x & -\%e^y & 1 \end{pmatrix}$$

Przyjmujemy początkowe rozwiązanie (1,1,1).

(%i7)
```
x:1;
y:1;
z:1;
```

(x) 1

(y) 1

(z) 1

Obliczamy macierz jednokolumnową [h1,h2,h3] poprawek

(%i8)
```
H:−invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
```

(H)
$$\begin{pmatrix} \frac{2\,\%e-1}{6\,\%e+4}+\frac{\%e+3}{6\,\%e+4}+\frac{14}{6\,\%e+4} \\ \frac{2\,\%e+1}{6\,\%e+4}+\frac{\%e+1}{6\,\%e+4}+\frac{2}{6\,\%e+4} \\ \frac{8}{6\,\%e+4} \end{pmatrix}$$

i drugie przybliżenie rozwiązania razem z kryterium stopu:

(%i12)
```
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(x) 2.189326096598902
(y) 1.598475156656986
(z) 1.393900626627944
(%o12) 1.189326096598902

Zaczynamy iterowanie, aż do osiągnięcia zadanej dokładności.

(%i17)
```
H:−invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(H)
$$\begin{pmatrix} -0.3387364512718747 \\ -0.1542237406398924 \\ -0.1156766263065727 \end{pmatrix}$$

(x) 1.850589645327027
(y) 1.444251416017093
(z) 1.278224000321371
(%o17) 0.3387364512718747

(%i22)
```
H:−invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(H) $\begin{pmatrix} -0.07042844907719042 \\ -0.01981543665577125 \\ -0.03893155989984558 \end{pmatrix}$

(x) 1.780161196249836

(y) 1.424435979361322

(z) 1.239292440421526

(%o22) 0.07042844907719042

(%i27)
```
H:−invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(H) $\begin{pmatrix} -0.00248648742632395 \\ -4.750538518618381\ 10^{-4} \\ -0.001818622595949762 \end{pmatrix}$

(x) 1.777674708823513

(y) 1.42396092550946

(z) 1.237473817825576

(%o27) 0.00248648742632395

(%i32)
```
H:−invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(H) $\begin{pmatrix} -2.790809631691784\ 10^{-6} \\ -3.276209289979324\ 10^{-7} \\ -2.700089459099957\ 10^{-6} \end{pmatrix}$

(x) 1.777671918013881

(y) 1.423960597888531

(z) 1.237471117736117

(%o32) $2.790809631691784\ 10^{-6}$

```
(%i37) H:-invert(J(x,y,z)).matrix([f1(x,y,z)],[f2(x,y,z)],[f3(x,y,z)]);
x:x+H[1,1],numer;
y:y+H[2,1],numer;
z:z+H[3,1],numer;
max(abs(H[1,1]),abs(H[2,1]),abs(H[3,1])),numer;
```

(H) $\begin{pmatrix} -3.140350633710094\ 10^{-12} \\ -4.212077940308601\ 10^{-14} \\ -4.413284143177326\ 10^{-12} \end{pmatrix}$

(x) 1.777671918010741

(y) 1.423960597888489

(z) 1.237471117731703

(%o37) $4.413284143177326\ 10^{-12}$

Kryterium stopu jest spełnione. W otrzymamnym rozwiązaniu:

```
(%i40) x;
y;
z;
```

(%o38) 1.777671918010741

(%o39) 1.423960597888489

(%o40) 1.237471117731703

mamy 11 cyfr dokładnych po przecinku.