Programowanie liniowe

Wprowadzenie

- Podejmowanie decyzji - podstawowe pojęcia
- Programowanie liniowe (optymalizacja liniowa)
- Metoda graficzna
- Postać ogólna i standardowa programu liniowego
- Sprowadzanie programu liniowego do postaci standardowej

PODEJMOWANIE DECYZJI

Podejmowanie decyzji jest podstawowym elementem każdej działalności (w tym gospodarczej). Zazwyczaj w każdej sytuacji istnieją pewne warunki określające, jakie decyzje mogą być podjęte, tzn. jakie decyzje są *dopuszczalne*.

Na ogół, przy danych warunkach, istnieje wiele decyzji dopuszczalnych. Naturalne jest wtedy dążenie do podjęcia decyzji możliwie najlepszej, czyli *optymalnej*. Często podjęcie decyzji można wspomóc posługując się metodami matematycznymi.

Jest to możliwe, jeśli problem wyboru decyzji optymalnej da się ująć w języku matematycznym, tzn. wspomniane wyżej warunki mogą być zapisane w tym języku oraz kryterium rozstrzygające, która z decyzji jest optymalna da się przedstawić jako pewna funkcja, określona na zbiorze decyzji dopuszczalnych.

Wtedy podjęcie decyzji optymalnej sprowadzi się do znalezienia minimum lub maksimum tej funkcji na zbiorze dopuszczalnym.

Problem optymalizacji (problem programowania matematycznego) można zatem sformułować w sposób ogólny następująco:

Zminimalizować lub zmaksymalizować funkcję $f(x)$
przy warunku $x \in X$.

Powyższą funkcję f (kryterium optymalności) będziemy nazywać *funkcją celu*. Symbol X oznacza zbiór decyzji dopuszczalnych określony danym układem warunków, które będziemy nazywać *warunkami ograniczającymi* lub po prostu *ograniczeniami*.

Rozwiązaniem dopuszczalnym problemu nazywać będziemy każdy element x zbioru X, zaś *rozwiązaniem optymalnym* element $x^* \in X$ minimalizujący lub maksymalizujący funkcję celu $f(x)$, tzn.

$$\min_{x \in X} f(x) = f(x^*) \text{ lub } \max_{x \in X} f(x) = f(x^*).$$

Jeżeli zbiór X jest zbiorem pustym, to problem nazywamy *sprzecznym* - w przeciwnym przypadku - *niesprzecznym*.

PROGRAMOWANIE LINIOWE

Optymalizacja liniowa

Problemem programowania liniowego, który krótko nazywać będziemy *programem liniowym*, jest problem minimalizacji lub maksymalizacji funkcji liniowej na zbiorze określonym przez układ warunków liniowych, tzn. nierówności lub równań liniowych.

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych X jest w tym przypadku podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$.

Uniwersalną metodą rozwiązywania tego typu problemów jest tzw. *metoda sympleks* opracowana przez George'a Dantzig'a w 1947 roku.

METODA GRAFICZNA

W przypadku kiedy $X \subset \mathbb{R}^2$, to program liniowy można rozwiązać *metodą graficzną*. Nie ma ona znaczenia praktycznego, ale jej zrozumienie pozwala lepiej zrozumieć geometrię algorytmu sympleks.

Przykład 1.
Zakład może wytwarzać dwa wyroby P_1 i P_2. Ich produkcja jest limitowana ze względu na ograniczone zasoby trzech surowców: S_1, S_2 i S_3. Posiadane zapasy tych surowców, zyski jednostkowe ze sprzedaży produktów oraz nakłady jednostkowe poszczególnych surowców związane z produkcją podaje poniższa tabela.

	P_1	P_2	Zasoby
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Zaplanować produkcję zakładu tak, aby zmaksymalizować zysk ze sprzedaży produktów. Przeprowadzić analizę wrażliwości rozwiązania optymalnego na zmiany cen oraz zmiany zasobów surowców.

Model matematyczny problemu.

Zmienne decyzyjne - tzn. niewiadome (szukane):

x_1 - wielkość produkcji wyrobu P_1,

x_2 - wielkość produkcji wyrobu P_2.

Program liniowy:

Zmaksymalizować funkcję $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ przy warunkach:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ostatnie dwa warunki w powyższym układzie, zapewniające nieujemną wielkość produkcji, noszą nazwę *warunków brzegowych*. Funkcja celu f w tym problemie wyraża całkowity zysk przy wielkości produkcji na poziomie (x_1, x_2).

Zazwyczaj program liniowy zapisujemy w postaci skróconej:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

POSTACIE PROGRAMÓW LINIOWYCH
Postać ogólna

Ogólna postać programu liniowego jest następująca:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \text{min(max)} & (1)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, \dots, m) & (2)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i \quad (i = m+1, \dots, p) & (3)\\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = p+1, \dots, r) & (4)\\
x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n_1) & (5)\\
x_j \leqslant 0 \quad (j = n_1 + 1, \dots, n_2) & (6)\\
x_j \in \mathbb{R} \quad (j = n_2 + 1, \dots, n). & (7)
\end{cases}
$$

Rozwiązaniem dopuszczalnym tego problemu nazywamy każdy wektor zmiennych decyzyjnych:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

który spełnia wszystkie warunki ograniczające (2) – (7). Rozwiązaniem optymalnym tego problemu jest takie rozwiązanie dopuszczalne dla którego funkcja celu (1) osiąga minimum (maksimum).

Warunkami ograniczającymi (ograniczeniami) będziemy w dalszym ciągu nazywać warunki postaci (2)-(4) (zawężając nieco sens tego pojęcia), natomiast warunki postaci (5)-(7) będziemy nazywać warunkami brzegowymi.

Ponadto będziemy używać następującej terminologii:

c_j - j-ta waga (współczynnik) funkcji celu,
b_i - i-ty wyraz wolny,
a_{ij} - współczynnik macierzy ograniczeń w i-tym wierszu i j-tej kolumnie,

gdzie $j = 1, \ldots, n$ oraz $i = 1, \ldots, r$.

Postać standardowa programu liniowego

Program liniowy jest w postaci standardowej, jeżeli
(i) jest to problem dotyczący minimalizacji,
(ii) wszystkie ograniczenia są równościami,
(iii) wszystkie zmienne decyzyjne są nieujemne.

Uwaga 1. Oznacza to, że w postaci ogólnej występują tylko ograniczenia typu (4) i warunki brzegowe typu (5).

Uwaga 2. Należy zauważyć, że nie ma jednoznaczności w kwestii nazewnictwa różnych postaci programu liniowego. W literaturze, szczególnie polskiej, powyższa postać programu liniowego bywa nazywana postacią kanoniczną.

Bardzo wygodnym sposobem zapisu programu liniowego w postaci standardowej jest zapis macierzowy. Mamy wtedy

$$\begin{cases} c^T x \to \text{min} \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ - macierz ograniczeń,

$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ - wektor wyrazów wolnych,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ - wektor zmiennych decyzyjnych,

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$ - wektor wag funkcji celu.

Uwaga 3. Przypomnijmy, że symbol c^T oznacza macierz transponowaną do macierzy jednokolumnowej c, tzn. $c^T = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$, natomiast symbol $x \geqslant 0$ oznacza, że $x_j \geqslant 0$ dla każdego j.

SPROWADZANIE PROGRAMU LINIOWEGO DO POSTACI STANDARDOWEJ

Pierwszą fazą rozwiązywania programu liniowego metodą sympleks jest sprowadzenie go do postaci standardowej.

Aby uzyskać równoważną dla danego zadania programowania liniowego postać standardową każdy warunek ograniczający w postaci nierówności zamieniamy na równość, wprowadzając związaną z nim tzw. *zmienną swobodną*. Zmienne te wchodzą do funkcji celu *z zerowymi wagami*, tzn. nie mają na nią wpływu.

Jeżeli w programie liniowym warunek ograniczający jest nierównością typu (2), tzn.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,$$

to związaną z nim zmienną swobodną definiujemy jako

$$x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j.$$

Oczywiście jest $x_{n+i} \geqslant 0$, przy czym jej nie ujemność wynika wprost z jej określenia.

Jeżeli w programie liniowym warunek ograniczający jest nierównością typu (3), tzn.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,$$

to związaną z nim zmienną swobodną definiujemy jako

$$x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \geqslant 0.$$

Przykład 2.

Sprowadzimy teraz poniższy program liniowy do postaci standardowej. Rozważmy program w postaci ogólnej:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 5 \\ x_1 \leqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Przekształcając problem maksymalizacji na problem minimalizację skorzystamy z faktu:

Uwaga 4. Poniższe dwa programy liniowe są sobie równoważne:

$$\begin{cases} c^T x \to \text{max} \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -c^T x \to \text{min} \\ Ax = b \\ x \geqslant 0. \end{cases}$$

Stosujemy uwagę 4 i wprowadzamy zmienne swobodne x_4 i x_5, co prowadzi do:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \to \text{min} \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\ x_1 \leqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Jeszcze nie wszystkie zmienne są nieujemne. Dokonujemy zatem zamiany zmiennych x_1 i x_2 w następujący sposób:
$x_1 = -x_1^{'}$, wtedy $x_1^{'} \geqslant 0$ oraz $x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}$, gdzie $x_2^{'} \geqslant 0$ i $x_2^{''} \geqslant 0$.

Otrzymujemy ostatecznie program w postaci standardowej:

$$\begin{cases} -2x_1^{'} - 4x_2^{'} + 4x_2^{''} - 2x_3 \to \text{min} \\ -2x_1^{'} + 3x_2^{'} - 3x_2^{''} + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1^{'} + 2x_2^{'} - 2x_2^{''} + 3x_3 + x_5 = 5 \\ x_1^{'}, x_2^{'}, x_2^{''}, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Uwaga 5. Każdy program liniowy (również sprzeczny) można sprowadzić do postaci standardowej.