Całki podwójne

Wykład

- Całki podwójne po prostokącie
- Całki podwójne po obszarach normalnych
- Zastosowania geometryczne całek podwójnych

Definicja 1. (*podział prostokąta*)
Podziałem prostokąta $R = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ nazywamy zbiór $\mathcal{P}$ złożony z prostokątów $R_1, R_2, \ldots, R_n$, które całkowicie wypełniają prostokąt R i mają parami rozłączne wnętrza.

Rysunek 1. *Podział prostokąta.*

Oznaczenia stosowane w definicji całki po prostokącie

$\Delta x_k, \Delta y_k$ - wymiary prostokąta R_k, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$;
$d_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ - długość przekątnej prostokąta R_k, gdzie $1 \leqslant k \leqslant n$;
$\delta(\mathcal{P}) = \max\{d_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ - średnica podziału $\mathcal{P}$;
$\Psi = \left\{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots, (x_n^*, y_n^*)\right\}$, gdzie $(x_k^*, y_k^*) \in R_k$ dla $1 \leqslant k \leqslant n$ - zbiór punktów pośrednich podziału $\mathcal{P}$.

Definicja 2. (*suma całkowa funkcji po prostokącie*)
Niech funkcja będzie ograniczona na prostokącie R oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego prostokąta, a Ψ zbiorem punktów pośrednich. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim Ψ nazywamy liczbę

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k).$$

Definicja 3. (*całka podwójna po prostokącie*)
Niech funkcja będzie ograniczona na prostokącie R. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R definiujemy wzorem:

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)(\Delta x_k)(\Delta y_k),$$

o ile granica po prawej stronie znaku równości jest właściwa i nie zależy od sposobu podziału $\mathcal{P}$ prostokąta R ani od sposobów wyboru punktów pośrednich Ψ. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na prostokącie R.

Uwaga 1. Całkę podwójną z funkcji f po prostokącie R oznaczamy też symbolem

$$\iint\limits_{R} f(x,y)d\sigma.$$

Całka podwójna po prostokącie jest naturalnym uogólnieniem całki z funkcji jednej zmiennej po przedziale.

Twierdzenie 1. *(*o całkowalności funkcji ciągłych*)*
Funkcja ciągła na prostokącie jest na nim całkowalna.

Twierdzenie 2. *(*o liniowości całki podwójnej*)*
Niech funkcje f i g będą całkowalne na prostokącie R oraz niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\iint\limits_R \Big(\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)\Big) d\sigma = \alpha \iint\limits_R f(x,y) d\sigma + \beta \iint\limits_R g(x,y) d\sigma.$$

Twierdzenie 3. *(*o addytywności całki podwójnej względem obszaru całkowania*)*
Jeżeli funkcja R jest całkowalna na prostokącie R, to dla dowolnego podziału tego prostokąta na prostokąty R_1, R_2 o rozłącznych wnętrzach zachodzi równość

$$\iint\limits_{R} f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{R_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{R_2} f(x,y)d\sigma.$$

Twierdzenie 4. *(*o zamianie całki podwójnej na całki iterowane*)* *Jeżeli funkcja f jest ciągła na prostokącie $[a,b]\times[c,d]$, to*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)d\sigma = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right] dy.$$

Uwaga 2. Całki występujące w tezie twierdzenia 4 nazywamy całkami iterowanymi funkcji po prostokącie.

Uwaga 3. W dalszych rozważaniach będziemy stosować oznaczanie całek iterowanych

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx \quad \text{i} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy,$$

za pomocą całek pojedynczych postaci:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy \quad \text{i} \quad \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx.$$

Ćwiczenie 1. *Oblicz podane całki iterowane:*

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{2}^{4} (x^2 + y^2 x) dy, \qquad \int_{2}^{4} dy \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 x) dx.$$

Ćwiczenie 2. *Oblicz podane całki podwójne po wskazanych prostokątach:*

a) $\iint\limits_R \sin(x+y)\,dxdy, \qquad R = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right];$

b) $\iint\limits_R \frac{xydxdy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}, \qquad R = [0,1] \times [0,1].$

Twierdzenie 5. *(*całka podwójna z funkcji o zmiennych rozdzielonych*)*
Jeżeli f jest funkcją postaci $f(x,y) = g(x)h(y)$, gdzie funkcje g i h są ciągłe odpowiednio na przedziałach $[a,b]$ i $[c,d]$, to

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \left(\int\limits_a^b g(x)dx\right) \cdot \left(\int\limits_c^d h(y)dy\right).$$

Ćwiczenie 3. *Podane całki zamienić na iloczyny i sumy całek pojedynczych:*

a) $\iint\limits_R xy(x+y)dxdy$, *gdzie* $R = [-1,1] \times [-1,1]$*;*

b) $\iint\limits_R \cos(x+y)dxdy$, *gdzie* $R = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Zamiana zmiennych w całce podwójnej

Niech przekształcenie

(1) $$x = \varphi(u, v), \qquad y = \psi(u, v)$$

odwzorowuje obszar regularny domknięty Δ (w płaszczyźnie zmiennych u i v) na obszar regularny domknięty D (w płaszczyźnie zmiennych x i y).

Twierdzenie 6. *(*wzór na zamianę zmiennych w całce podwójnej*)*
Jeżeli w przekształceniu (1)

- *funkcje φ i ψ są ciągłe wraz z pierwszymi pochodnymi w obszarze* Δ*;*

- *funkcja $f(x,y)$ jest ciągła w obszarze D;*

- *odwzorowanie wnętrza obszaru* Δ *w obszar D jest wzajemnie jednoznaczne;*

- *wewnątrz obszaru D jakobian*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

to ma miejsce wzór

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| dudv.$$

Uwaga 4. (*wzór na zamianę współrzędnych prostokątnych na współrzędne biegunowe w całce podwójnej*)
W szczególności przy wprowadzeniu współrzędnych biegunowych

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi$$

mamy

$$\iint\limits_D f(x, y) dxdy = \iint\limits_\Delta f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi.$$

Ćwiczenie 4. *Oblicz całkę*

$$I = \iint\limits_D \frac{xy}{2} d\sigma,$$

gdzie obszar D *jest ćwiartką koła*

$$x^2 + y^2 = 16$$

dla $x \in [0, 1]$. *Rachunki przeprowadź bez wprowadzania i z wprowadzaniem współrzędnych biegunowych.*

Definicja 4. (*całka podwójna po obszarze*)
Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną na obszarze ograniczonym $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech R będzie dowolnym prostokątem zawierającym obszar D. Ponadto niech funkcja f^* będzie rozszerzeniem funkcji f na R określonym wzorem:

$$f^*(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{dla} \quad (x,y) \in D, \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) \in R \backslash D. \end{cases}$$

Całkę podwójną funkcji f po obszarze D definiujemy wzorem:

$$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma := \iint\limits_R f^*(x,y) d\sigma,$$

o ile całka występująca po prawej stronie znaku równości istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja f jest całkowalna na obszarze D.

Definicja 5. (*obszary normalne względem osi układu*)
1. Obszar domknięty D nazywamy obszarem normalnym względem osi Ox, jeżeli można zapisać go w postaci:

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\},$$

gdzie funkcje g i h są ciągłe na $[a,b]$ oraz $g(x) < h(x)$ dla każdego $x \in (a,b)$.
2. Obszar domknięty D nazywamy obszarem normalnym względem osi Oy, jeżeli można zapisać go w postaci:

$$D = \{(x,y) : p(y) \leqslant x \leqslant q(y),\ c \leqslant y \leqslant d\},$$

gdzie funkcje p i q są ciągłe na $[c,d]$ oraz $p(y) < q(y)$ dla każdego $y \in (c,d)$.

Rysunek 2. *Obszar normalny względem osi* Ox.

Rysunek 3. *Obszar normalny względem osi* Oy.

Ćwiczenie 5. *Narysować podane obszary i określić, który z tych obszarów jest normalny:*

a) $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;

b) $y = 0$, $x = 2$, $y = x^2$;

c) $y = |\sin x|$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

d) $x^2 + y^2 = 1$.

Twierdzenie 7. *(*całki iterowane po obszarach normalnych*)*
1. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$D = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b,\ \ g(x) \leqslant y \leqslant h(x)\}$$

normalnym do osi Ox, to

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

2. Jeżeli funkcja f jest ciągła na obszarze domkniętym

$$D = \{(x,y) : p(y) \leqslant x \leqslant q(y),\ \ c \leqslant y \leqslant d\}$$

normalnym do osi Oy, to

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Ćwiczenie 6. *Obliczyć podane całki podwójne:*

a) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2 - xy)dxdy$, *gdzie* $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geqslant x, y \leqslant 3x - x^2\Big\}$;

b) $\displaystyle\iint\limits_D (3x - 2y)dxdy$, *gdzie* $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\Big\}$;

c) $\displaystyle\iint\limits_D xydxdy$, *gdzie* $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leqslant 6 - x, y \geqslant \sqrt{x}, x \geqslant 0\Big\}$.

Definicja 6. (*obszar regularny na płaszczyźnie*)
Sumę skończonej liczby obszarów normalnych o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy obszarem regularnym na płaszczyźnie.

Twierdzenie 8. *(*pole obszaru regularnego*)*
Pole obszaru regularnego $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem:

$$|D| = \iint\limits_D d\sigma.$$

Ćwiczenie 7. *Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:*
a) $y = x^2 - x$, $y = x$;
b) $y = e^x$, $y = \ln x$, $x + y = 1$, $x = 2$.

Twierdzenie 9. *(*Objętość bryły*)*
Objętość bryły V położonej nad obszarem regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$ i ograniczonej z dołu i z góry odpowiednio wykresami funkcji ciągłych $z = f(x, y)$ i $z = g(x, y)$ wyraża się wzorem:

$$|V| = \iint\limits_D [g(x, y) - f(x, y)]\, d\sigma.$$

Ćwiczenie 8. *Obliczyć objętość brył ograniczonych wskazanymi powierzchniami:*

a) $x = 0$, $x = 1 - |y|$, $z = 0$, $z = 10 - 5x - 2y$;

b) $z = 2 - x - y$, $z = 0$, $y^2 = x$;

c) $z = e^{y-x}$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Twierdzenie 10. *(*Pole powierzchni w przestrzeni*)*
Pole powierzchni płata gładkiego S o równaniu $z = f(x, y)$ położonego nad obszarem regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$ wyraża się wzorem:

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy.$$

Ćwiczenie 9. *Oblicz pole części powierzchni* $2xy - z^2 = 0$ *wyciętej przez prostopadłościan, którego podstawa znajduje się w płaszczyźnie OXY, a wierzchołkami jej są punkty* $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(4,9)$ *i* $D(0,9)$.

Ćwiczenie 10. *Oblicz pole powierzchni walca o promieniu 1, zawarte wewnątrz kuli o promieniu 2, której środek leży na powierzchni walca.*