Geometria analityczna w przestrzeni

Wykład (Budownictwo)

- Wektory
- Iloczyn skalarny i wektorowy
- Równanie płaszczyzny i prostej
- Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

Definicja 1. (*przestrzeń* $\mathbb{R}^3$)
Przestrzenią $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych, tzn.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definicja 2. (*punkty współliniowe*)
Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.

Definicja 3. (*punkty współpłaszczyznowe*)
Mówimy, że punkty D, E, F, G przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.

Rysunek 1. *Punkty współliniowe i współpłaszczyznowe.*

Twierdzenie 1. *(*współrzędne środka odcinka*)*
Współrzędne punktu S dzielącego odcinek AB na połowy wyrażają się wzorem :

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2},$$

gdzie $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Ćwiczenie 1. *Niech $A = (-1, 2, 5)$ oraz $B = (1, 10, -7)$. Obliczyć współrzędne środka odcinka AB.*

Definicja 4. (*wektor zaczepiony*)
Wektorem zaczepionym $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B. Jeżeli $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, wówczas

$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

Definicja 5. (*wektor swobodny*)
Wektorem swobodnym $\vec{u}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}$.

Rysunek 2. *Wektory zaczepione i swobodne.*

Definicja 6. (*działania na wektorach*)
Niech dane będą wektory $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$.
Sumę wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3].$$

Różnicę wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} := [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3].$$

Iloczyn wektora $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy wzorem:

$$\alpha \overrightarrow{a} := [\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3].$$

Rysunek 3. *Suma i różnica wektorów.*

Rysunek 4. *Iloczyn wektora przez liczbę.*

Twierdzenie 2. *(*warunek równoległości wektorów*)*
Wektory $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *i* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Definicja 7. (*kartezjański* układ współrzędnych w przestrzeni*)
Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone, wzajemnie prostopadłe proste zwane osiami, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu.

*René Descartes (1596-1650) - matematyk i filozof francuski

Definicja 8. (*wersory osi układu współrzędnych*)
Wektory $\overrightarrow{i} = [1, 0, 0]$, $\overrightarrow{j} = [0, 1, 0]$, $\overrightarrow{k} = [0, 0, 1]$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach x, y i z.

Rysunek 5. *Wersory osi układu współrzędnych.*

Definicja 9. (*długość wektora*)
Długość wektora $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ jest określona wzorem:

$$|\overrightarrow{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Ćwiczenie 2. *Obliczyć długości podanych wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-3, 0, 4]$*;*
b) $\overrightarrow{v} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31}]$*,*
c) $\overrightarrow{AB}$*, gdzie* $A = (2, 1, -3)$*,* $B = (-1, 1, 4)$*.*

Definicja 10. (*iloczyn skalarny*)
Niech $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} := \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Twierdzenie 3. *(*warunek konieczny prostopadłości wektorów*)*
Jeżeli wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są prostopadłe, to wówczas

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0.$$

Twierdzenie 4. *(*wzór do obliczania iloczynu skalarnego*)*
Niech $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *i* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$*.*
Wtedy

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Ćwiczenie 3. *Obliczyć iloczyn skalarny podanych wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, -3]$, $\overrightarrow{v} = [2, 0, -1]$*;*
b) $\overrightarrow{u} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$, $\overrightarrow{v} = [\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0]$.

Definicja 11. (*iloczyn wektorowy*)
Niech $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ będą niewspółliniowymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{c}$, który spełnia warunki:
1. jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$;
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, tzn.:

$$|\overrightarrow{c}| = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$,
3. orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.
Iloczyn wektorowy pary wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ oznaczamy przez $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Twierdzenie 5. *(*wzór do obliczania iloczynu wektorowego*)*
Niech $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *oraz* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$*.*
Wtedy

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ *oznaczają wersory odpowiednio na osiach* x, y *i* z*.*

Ćwiczenie 4. *Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, 5]$, $\overrightarrow{v} = [2, 0, -3]$;
b) $\overrightarrow{u} = [-1, -3, 4]$, $\overrightarrow{v} = [5, 6, -2]$.

Twierdzenie 6. *(*równanie normalne płaszczyzny*)*
Równanie płaszczyzny π *przechodzącej przez punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i prostopadłej do wektora* $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ *ma postać:*

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Wektor $\overrightarrow{n}$ *nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny.*

Ćwiczenie 5. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P = (-1, 2, 0)$ *i prostopadłej do wektora* $\overrightarrow{n} = [2, -3, 1]$.

Ćwiczenie 6. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka* AB, *gdzie* $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$ *i prostopadłej do tego odcinka.*

Twierdzenie 7. *(*równanie ogólne płaszczyzny*)*
Każde równanie postaci:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$, *przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny* $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ *i przecina oś* z *w punkcie* $z = -\dfrac{D}{C}$, *o ile* $C \neq 0$.

Ćwiczenie 7. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P = (3, -2, 5)$ *i równoległej do płaszczyzny* xOz.

Ćwiczenie 8. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $Q = (1, 3, -2)$ *i przez oś* y.

Twierdzenie 8. *(*równanie parametryczne prostej*)*
Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = [\alpha, \beta, \gamma]$ jest postaci:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wektor $\overrightarrow{v}$ nazywa się wektorem kierunkowym prostej.

Ćwiczenie 9. *Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt* $P = (-1, 0, 3)$ *i równoległej do wektora* $\overrightarrow{v} = [2, -1, 5]$.

Ćwiczenie 10. *Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty* $P = (1, 2, 3)$ *i* $Q = (3, 2, 1)$.

Twierdzenie 9. *(*równanie kierunkowe prostej*)*
Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\overrightarrow{v} = [\alpha, \beta, \gamma]$ jest postaci:

$$l : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Ćwiczenie 11. *Znaleźć punkty przecięcia prostej*

$$l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$$

z płaszczyznami układu współrzędnych.

Ćwiczenie 12. *Zbadać, czy proste*

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}, \qquad l_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+1}{1}$$

mają punkt wspólny.

Definicja 12. (*równanie krawędziowe prostej*)
Prostą l, która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0,$$

będziemy zapisywać w postaci:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 10. *(*o wektorze kierunkowym prostej w postaci krawędziowej*)*
Wektor kierunkowy prostej

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ma postać

$$\overrightarrow{v} = [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2].$$

Ćwiczenie 13. *Prostą*

$$l: \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

zapisać w postaci parametrycznej.

Ćwiczenie 14. *Znaleźć punkt przecięcia prostej*

$$l: \begin{cases} x + y + z + 4 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

z płaszczyzną xOz.

Definicja 13. (*rzut punktu na płaszczyznę i na prostą*)
Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp \pi.$$

Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp l.$$

Uwaga 1. Wektor jest prostopadły do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadły do każdego wektora zawartego w tej płaszczyźnie. Podobnie wektor jest prostopadły do prostej, jeżeli jest prostopadły do każdego wektora zawartego w tej prostej.

Ćwiczenie 15. *Znaleźć rzut prostokątny punktu* $P = (3, -2, 1)$ *na płaszczyznę* $\pi : 2x - y + 3z = 0$.

Ćwiczenie 16. *Znaleźć rzut prostokątny punktu* $P = (2, -1, 4)$ *na prostą* $l : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$.