

Badanie funkcji

Wykład

- Ekstrema funkcji
- Funkcje wypukłe i wklęsłe
- Punkty przegięcia wykresu

Definicja 1. (*minimum lokalne*)

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum lokalne, jeżeli

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) > f(x_0).$$

Definicja 2. (*maksimum lokalne*)

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne, jeżeli

$$\exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) f(x) < f(x_0).$$

Rysunek 1. *Minimum i maksimum lokalne.*

Twierdzenie 1. (Fermata*, warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0 , to

$$f'(x_0) = 0.$$

Uwaga 1. Implikacja odwrotna jest fałszywa. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^3$, która spełnia w punkcie $x_0 = 0$ warunek $f'(x_0) = 0$, ale nie ma tam ekstremum lokalnego.

*Pierre de Fermat (1601-1665) - matematyk francuski.

Twierdzenie 2. (I warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

- 1. $f'(x_0) = 0$;*
- 2. pochodna $f'(x)$ przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 , zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to funkcja f osiąga minimum (maksimum) lokalne w punkcie x_0 .*

Rysunek 2. *Minimum i maksimum lokalne.*

Ćwiczenie 1. *Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4;$

b) $g(x) = e^x + e^{-x};$

c) $h(x) = \frac{\ln x}{x}.$

Twierdzenie 3. (II warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. $f'(x_0) = 0;$

2. $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$),

to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Ćwiczenie 2. *Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:*

a) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x;$

b) $g(x) = (x - 5)e^x.$

Definicja 3. (*minimum i maksimum globalne*)

Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze $A \subset D_f$ osiąga w punkcie x_0 minimum (maksimum) globalne, jeżeli osiąga w tym punkcie wartość najmniejszą (największą) spośród wszystkich swoich wartości.

Rysunek 3. *Ekstrema globalne funkcji.*

Ćwiczenie 3. *Znaleźć ekstrema globalne funkcji na podanych przedziałach:*

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2, \quad [-1, 2];$

b) $g(x) = x^3 \ln x^3, \quad [\frac{1}{e}, 2];$

c) $h(x) = 2 \sin x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi].$

Ćwiczenie 4. *Tekst w książce zajmuje na każdej stronie powierzchnię 200 cm^2 , marginesy z lewej i z prawej strony są równe 1 cm , a marginesy z dołu i góry są równe 2 cm . Zaprojektować wymiary kartek w tej książce tak, aby zużyć jak najmniej papieru.*

Ćwiczenie 5. *W półkole o promieniu R wpisać prostokąt o największym polu. Podstawa prostokąta ma leżeć na średnicy półkola.*

Ćwiczenie 6. *Znaleźć wymiary puszki do konserw w kształcie walca o objętości $V = 250\pi \text{ cm}^3$, do sporządzenia której zużyje się najmniej blachy.*

Ćwiczenie 7. *Pies i jego właściciel stoją po przeciwległych stronach okrągłego basenu o promieniu $R = 10 \text{ m}$. Pies biega z prędkością $v_b = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ i pływa z prędkością $v_p = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Jak powinien poruszać się pies, aby najszybciej dotrzeć do właściciela? (Przypomnijmy, że długość cięciwy dla kąta środkowego α wyraża się wzorem: $d = 2R \sin \frac{1}{2}\alpha$, natomiast długość łuku dla kąta środkowego β jest postaci: $l = \beta R$.)*

Definicja 4. (*funkcja wypukła*)

Funkcja jest wypukła na przedziale (a, b) , jeżeli

$$\forall a < x_1 < x_2 < b \forall 0 < \lambda < 1 \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Uwaga 2. Wypukłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży wyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Rysunek 4. *Funkcja wypukła.*

Definicja 5. (*funkcja wklęsła*)

Funkcja jest wklęsła na przedziale (a, b) , jeżeli

$$\forall a < x_1 < x_2 < b \forall 0 < \lambda < 1 \quad f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Uwaga 3. Wklęsłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży niżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Rysunek 5. *Funkcja wklęsła.*

Twierdzenie 4. (warunek wystarczający wypukłości i wklęsłości)

1. Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wypukła na (a, b) .

2. Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a, b)$, to funkcja f jest wklęsła na (a, b) .

Ćwiczenie 8. *Określić przedziały wypukłości i wklęstości podanych funkcji:*

a) $f(x) = e^{-x}$;

b) $g(x) = x^4$;

c) $h(x) = \sin x$;

d) $s(x) = \arctan x$.

Definicja 6. (*punkt przegięcia wykresu funkcji*)

Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie x_0 . Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f , jeżeli istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wypukła na $(x_0 - \delta, x_0)$ i wklęsła na $(x_0, x_0 + \delta)$ lub odwrotnie.

Uwaga 4. Punkt wykresu jest punktem przegięcia, jeżeli funkcja ma w tym punkcie styczną i zmienia w nim rodzaj wypukłości. Wykres funkcji przechodzi wtedy z jednej strony stycznej na drugą.

Rysunek 6. *Punkt przegięcia funkcji.*

Twierdzenie 5. (warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)
Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia, to

$$f''(x_0) = 0.$$

Twierdzenie 6. (warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)

Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

- 1. $f''(x_0) = 0$;*
- 2. pochodna $f''(x)$ przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0 , zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to wykres funkcji f ma punkt przegięcia w punkcie x_0 .*

Ćwiczenie 9. *Znaleźć punkty przegięcia podanych funkcji:*

a) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$;

b) $g(x) = e^{\cos x}$;

c) $h(x) = x^2 \ln x$;

d) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.