Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych

Wykład 7

- Istnienie i jednoznaczność rozwiązania
- Zastosowanie wzoru Taylora
- Metoda Eulera
- Metody Rungego-Kutty

Wstęp

Celem tego wykładu jest przedstawienie metod numerycznego rozwiązywania równań różniczkowych pierwszego rzędu z warunkiem początkowym. Taki układ - równanie i warunek - nazywamy *zagadnieniem początkowym*.

Typowe zagadnienie początkowe jest opisane równaniami

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego polega na znalezieniu funkcji y zmiennej x, która spełnia oba równania. W przypadku, gdy nie umiemy znaleźć wzoru takiej funkcji, musimy stosować metody numeryczne.

Istnienie

Nie każde zagadnienie początkowe ma rozwiązanie. Żeby ono istniało, trzeba coś założyć o funkcji f.

Twierdzenie 1. *Jeśli dla pewnych* $\alpha, \beta > 0$ *funkcja* f *jest ciągła w prostokącie*

$$R := \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\},$$

to zagadnienie początkowe ma rozwiązanie $y(x)$ *dla*

$$|x - x_0| \leqslant \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\},$$

gdzie $M := \max_R |f(x, y)|$.

Przykład 1. *Sprawdzić, gdzie istnieje rozwiązanie zagadnienia początkowego*

$$y' = (x + \sin y)^2, \quad y(0) = 3.$$

Rozwiązanie. Funkcja $f(x, y) = (x + \sin y)^2$ jest ciągła na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, czyli α i β w definicji prostokąta R mogą być dowolne. Stała M nie przewyższa $(\alpha + 1)^2$. Jeśli przyjmiemy $\beta := \alpha(\alpha + 1)^2$, to mamy $\frac{\beta}{M} = \alpha$ i wtedy $\min\{\alpha, \frac{\beta}{M}\} = \alpha$, więc rozwiązanie istnieje na całej prostej rzeczywistej.

Jednoznaczność

Jeżeli nawet funkcja f jest ciągła, to zagadnienie początkowe może mieć wiele rozwiązań. Dla przykładu weźmy

$$y' = y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Rozwiązaniem jest funkcja $y = 0$, ale też funkcja $y = \frac{x^3}{27}$. Aby mieć pewność jednoznaczności rozwiązania, trzeba założyć coś więcej o funkcji f.

Twierdzenie 2. *Jeśli funkcje f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ są ciągłe w prostokącie*

$$R := \{(x, y) : |x - x_0| \leqslant \alpha, |y - y_0| \leqslant \beta\},$$

to dla

$$|x - x_0| < \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\},$$

gdzie $M := \max_R |f(x, y)|$, zagadnienie początkowe ma jednoznaczne rozwiązanie.

Zastosowanie wzoru Taylora

Rozwiązując numerycznie równanie różniczkowe z warunkiem początkowym, dostajemy tablicę przybliżeń y_i dokładnego rozwiązania y w punktach t_i. Gdy jest taka potrzeba, to za pomocą tych wartości możemy zbudować funkcję przybliżającą rozwiązanie dokładne, np. stosując interpolację.

Jedną z metod pozwalających wygenerować wspomnianą tablicę przybliżeń jest metoda oparta na wzorze Taylora (wykład 2, str. 4). W zależności od tego ile składników pozostawiamy we wzorze, dostajemy metodę określonego rzędu.

Przykładowo zastosowanie wzoru, dla ustalonego kroku h

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x),$$

w którym pozostawiono pochodne do czwartej włącznie, prowadzi do *metody Taylora czwartego rzędu*. Metoda ta polega na tym, że znając wartość $y(x)$ dokładną lub przybliżoną w punkcie x (na początku przyjmujemy $x = x_0$), obliczamy z powyższego wzoru wartość w punkcie $x + h$, tzn. $y(x + h)$. Stosując metodę Taylora musimy mieć pewność, ze wszystkie potrzebne pochodne istnieją.

Ćwiczenie 1. *Stosując metodę Taylora czwartego rzędu, rozwiązać zagadnienie początkowe*

$$y'(x) = \cos(x) - \sin(x) + x^2, \quad y(-1) = 3$$

w przedziale $[-1, 1]$ *z krokiem* $h = 0.05$.

Uwaga 1. Do zalet tej metody należy zaliczyć jej prostotę i możliwość osiągnięcia wysokiej dokładności. Jeżeli pochodne wysokiego rzędu dają się łatwo wyliczyć, możemy stosować metodę wysokiego rzędu, tym samym wydłużając krok, bez straty dokładności.

Wadą tej metody jest to, że odpowiednie pochodne muszą istnieć w obszarze przez który przechodzi rozwiązanie i że trzeba je wyliczyć.

Metoda Eulera

Metoda Taylora rzędu pierwszego opiera się na wzorze

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{1!} y'(x).$$

Rozwiązując równanie różniczkowe pierwszego rzędu mamy

$$y' = f(x, y),$$

co wstawione do do wzoru Taylora daje *metodę Eulera*

$$y(x+h) \approx y(x) + h f(x, y).$$

Oczywistą zaletą jest to, że nie trzeba różniczkować funkcji f. Płacimy za to koniecznością wyboru bardzo małego kroku h.

Ćwiczenie 2. *Stosując metodę Eulera, rozwiązać zagadnienie początkowe*

$$y' + 4y = 1, \quad y(0) = 1$$

w przedziale $[0, 2]$ *z krokiem* $h = 0.01$.

Ćwiczenie 3. *Stosując metodę Eulera, rozwiązać zagadnienie początkowe*

$$y' = -y \ln y, \quad y(0) = 3$$

w przedziale $[0, 1]$ *z krokiem* $h = 0.005$.

Metody Rungego-Kutty

Opisana jako pierwsza metoda Taylora wymaga obliczania wielu pochodnych w zależności od rzędu metody. Metody Rungego-Kutty nie mają tej wady. Zamiast tych pochodnych trzeba tu obliczyć różne kombinacje wartości funkcji f.

Metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego określona jest wzorem

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{2}(F_1 + F_2),$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_1 &:= hf(x,y), \\ F_2 &:= hf(x+h, y+F_1). \end{aligned}$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego polega na zastosowaniu wzoru:

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4),$$

gdzie

$$\begin{aligned}
F_1 &:= hf(x, y), \\
F_2 &:= hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}F_1), \\
F_3 &:= hf(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}F_2), \\
F_4 &:= hf(x + h, y + F_3).
\end{aligned}$$

Ćwiczenie 4. *Stosując metodę Rungego-Kutty drugiego rzędu, rozwiązać zagadnienie początkowe*

$$y' = -y \ln y, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

w przedziale $[0, 1]$ *z krokiem* $h = 0.02$.

Ćwiczenie 5. *Stosując metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu, rozwiązać zagadnienie początkowe*

$$y' = \frac{xy - y^2}{x^2}, \quad y(1) = 2$$

w przedziale $[1, 3]$ *z krokiem* $h = \frac{1}{128}$.