Metody numeryczne

Projekt

- Część I (termin składania do dnia 24.03.2020)
- Część II (termin składania do dnia 07.04.2020)
- Część III (termin składania do dnia 28.04.2020)
- Część IV (termin składania do dnia 12.05.2020)
- Część V (termin składania do dnia 26.05.2020)
- Część VI (termin składania do dnia 09.06.2020)
- Część VII (termin składania do dnia 23.06.2020)

Część I

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Tworzymy funkcję

$$f(x) = a \arctan bx - \frac{cdx}{e + fx^2},$$

np. dla indeksu 164825 mamy $f(x) = \arctan 6x - \frac{48x}{2+5x^2}$. Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $f(x)$ z dokładnością do 10^{-8}, stosując metodę bisekcji, Newtona i siecznych.

Część II

Każda grupa laboratoryjna rozwiązuje jedno zadanie.

Grupa 1. Rozwiązać metodą Newtona układ równań

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{1}{9}e^{-x_1} = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + \frac{1}{9}e^{-x_2} = 1, \end{cases}$$

rozpoczynając od punktu $(1, 1)$, z dokładnością do 10^{-12}.

Grupa 2. Rozwiązać metodą Newtona układ równań

$$\begin{cases} xy - z^2 = 1 \\ xyz - x^2 + y^2 = 2 \\ e^x - e^y + z = 3, \end{cases}$$

dla punktu początkowego $(0, 1, 0)$, z dokładnością do 10^{-10}.

Grupa 3. Rozwiązać metodą Newtona układ równań

$$\begin{cases} 4x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 4x_1 x_2^2 - x_1 = 1 \end{cases}$$

dla punktu początkowego $(0, 1)$, z dokładnością do 10^{-10}.

Grupa 4. Rozwiązać metodą Newtona układ równań

$$\begin{cases} 1 + x^2 - y^2 + e^x \cos y = 0 \\ 2xy + e^x \sin y = 0, \end{cases}$$

dla punktu początkowego $(-1, 4)$ z dokładnością do 10^{-10}.

Część III

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Utworzyć układ równań według wzoru

$$\begin{bmatrix} b & -c & 0 & 0 \\ -a & b+e & a+f & 0 \\ 0 & b+c & c+d & -e \\ 0 & 0 & -d & -f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10a+e \\ -10e+f \\ 10f+e \\ 3c+f \end{bmatrix}$$

i rozwiązać go na trzy sposoby, stosując
a) podstawową eliminację Gaussa,
b) pełną eliminację Gaussa,
c) rozkład LU.

Część IV

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Utworzyć układ równań według wzoru

$$\begin{bmatrix} a+b+c & -c & 0 & 0 & -1 \\ -a & b+c+d & a-d & 0 & a \\ 0 & -c & c+d+e & -e+d & -d \\ 1 & 0 & e & d+e+f & f \\ 0 & -a & 0 & -1 & a+e+f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10a+e \\ -10e+f \\ 10f+e \\ 3c+f \\ -5b+c \end{bmatrix}$$

i rozwiązać go z dokładnością do 10^{-5}, stosując
a) metodę Jacobiego,
b) metodę Gaussa-Seidela,
c) metodę nadrelaksacji.

Wektor początkowy oraz parametr relaksacji ω (w metodzie SOR) dobrać tak, aby zapewnić szybką zbieżność ciągów iteracyjnych generowanych przez odpowiednie metody.

Część V

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Wyznaczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a i Newtona interpolujący wartości funkcji

$$f(x) = \ln(x+1)$$

w węzłach

$$\{a, b, c, d, e, f\}.$$

Przypuśćmy, że nie mamy możliwości obliczenia wartości

$$\ln(\frac{a+b+c+d+e+f}{6} + \frac{1}{10}).$$

Oszacować jak dokładne byłoby jej przybliżenie za pomocą wyznaczonego wielomianu.

Część VI

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Obliczyć z dokładnością do $10^{-\max\{d,e,f\}}$ przybliżoną wartość

$$\ln\left(\frac{a+b+c+d+e+f}{6} - \frac{1}{9}\right)$$

stosując wzór całkowy:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Podać rozwiązanie przy zastosowaniu kwadratury trapezów i Simpsona. Porównać wyliczoną wartość z wartością funkcji logarytm naturalny uzyskaną w pakiecie Maxima.

Część VII

Niech abcdef będzie numerem indeksu. Stosując metody Eulera oraz Rungego-Kutty drugiego i czwartego rzędu dla kroku

$$h = \frac{1}{a+b+c+d+e+f},$$

obliczyć na trzy sposoby, przybliżoną wartość $y(0)$ funkcji spełniającej zagadnienie początkowe

$$y' + y\tan x = 0, \qquad y(x_0) = \cos x_0,$$

gdzie

$$x_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{a+b+c+d+e+f}.$$