Układy równań liniowych

Wykład

- Podstawowe określenia
- Wyznacznik macierzy - metoda Sarrusa i metoda Gaussa
- Układy Cramera
- Dowolne układy (kwadratowe i niekwadratowe)

Definicja 1. (*macierz rzeczywista i zespolona*)
Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uwaga 1. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu, np. A, B, X itp. Element macierzy A stojący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie oznaczamy przez a_{ij}.

Twierdzenie 1. *(*równość macierzy*)*
Macierze A i B są równe, gdy mają te same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

Przykład 1. *Macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą rzeczywistą wymiaru 2×3, natomiast macierz

$$B = \begin{bmatrix} 1 - i & i \\ -5 + 2i & 2i \\ -1 + 3i & -i \end{bmatrix}$$

jest macierzą zespoloną wymiaru 3×2.

Definicja 2. (*macierz zerowa*)
Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $0_{m\times n}$ lub 0.

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja 3. (*macierz kwadratowa*)
Macierz, której liczba wierszy równa się liczbie kolumn nazywamy macierzą kwadratową. Liczbę wierszy (kolumn) nazywamy wtedy stopniem macierzy kwadratowej. Elementy macierzy, które mają ten sam numer wiersza co kolumny, tworzą główną przekątną macierzy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 4. (*macierz trójkątna*)
Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są zerowe nazywamy macierzą trójkątną dolną.

Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są zerowe nazywamy macierzą trójkątną górną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 5. (*macierz diagonalna*)
Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy, poza stojącymi na głównej przekątnej, są zerowe nazywamy macierzą diagonalną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 6. (*macierz jednostkowa*)
Macierz diagonalną stopnia n, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy przez I_n lub przez I.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definicja 7. (*wyznacznik macierzy*)

Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznacznikiem nazywamy funkcję rzeczywistą (zespoloną) det określoną na zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n spełniającą warunki:

1. $\det[k_1 \ldots ck_j \ldots k_n] = c \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n]$

dla każdego $c \in \mathbb{R} (c \in \mathbb{C})$, gdzie k_j oznacza j-tą kolumnę macierzy;

2. $\det[k_1 \ldots k_j + k_j^{'} \ldots k_n] = \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n] + \det[k_1 \ldots k_j^{'} \ldots k_n]$;
3. $\det[k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n] = -\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n]$;
4. $\det I_n = 1$.

Uwaga 2. Wyznacznik macierz A oznaczamy także przez $\det[a_{ij}]$ lub $|A|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{lub} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Będziemy mówili zamiennie: stopień wyznacznika $\longleftrightarrow$ stopień macierzy, element wyznacznika $\longleftrightarrow$ element macierzy, wiersz wyznacznika $\longleftrightarrow$ wiersz macierzy, kolumna wyznacznika $\longleftrightarrow$ kolumna macierzy.

Twierdzenie 2. *(*reguła Sarrusa* obliczania wyznaczników stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego*):*

$$\det[a] = a,$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Uwaga 3. Sposób ten nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

*Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) - matematyk francuski.

Ćwiczenie 1. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna wyznaczników drugiego i trzeciego stopnia.*

Twierdzenie 3. *(*wyznacznik macierzy trójkątnej*)*
Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów stojących na jego głównej przekątnej.

Ćwiczenie 2. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 2 & 4-3i \\ 0 & 2i & 3-i & -2+i \\ 0 & 0 & -3 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 5i \end{vmatrix}$.

Algorytm Gaussa obliczania wyznaczników

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 3$ oraz niech $a_{11} \neq 0$. Wówczas stopień wyznacznika macierzy A można obniżyć o 1 stosując następujący schemat:

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},$$

gdzie $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}$.

Uwaga 4. Zamiast elementu a_{11} można wybrać inny niezerowy element i analogicznie przekształcić odpowiednie wiersze.

Ćwiczenie 3. *Obliczyć podane wyznaczniki:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \qquad b)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Definicja 8. (*układ równań liniowych*)
Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

Definicja 9. (*rozwiązanie układu równań*)
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Definicja 10. (*układ sprzeczny, oznaczony i nieoznaczony*) Rozpatrzmy dowolny układ równań liniowych. Zachodzi jedna z trzech możliwości:

1. Zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym. Układ taki nazywamy układem sprzecznym.

2. Zbiór rozwiązań zawiera dokładnie jeden element. Układ taki nazywamy układem oznaczonym.

3. Zbiór rozwiązań zawiera nieskończenie wiele elementów. Układ taki nazywamy układem nieoznaczonym.

Definicja 11. (*postać macierzowa układu równań*)
Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą współczynników lub macierzą główną układu, macierz X - macierzą niewiadomych, macierz B - macierzą wyrazów wolnych.

Ćwiczenie 4. *Podane układy równań zapisać w postaci macierzowej:*

a) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 7x_1 - 4x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad ;$$

b) $$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ x + t = 3 \\ x + z - 3u = -5 \end{cases} \quad .$$

Definicja 12. (*układ Cramera*[*])
Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych

$$AX = B,$$

w którym A jest kwadratową macierzą nieosobliwą.

[*]Gabriel Cramer (1704-1752) - matematyk szwajcarski.

Twierdzenie 4. *(*wzory Cramera*)*
Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A}, \end{cases}$$

gdzie A_j dla $1 \leqslant j \leqslant n$ jest macierzą uzyskaną z macierzy A przez zastąpienie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Ćwiczenie 5. *Rozwiązać układy równań:*

a) $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ x - 2y + 5z = 4 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$.

Definicja 13. (*macierz uzupełniona*)
Macierzą uzupełnioną nazywamy macierz powstałą z macierzy A przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych. Macierz uzupełnioną oznaczamy przez U.

Definicja 14. (*równoważność układów równań*)
Mówimy, że układy równań liniowych

$$AX = B \quad \text{i} \quad A'X' = B'$$

są równoważne, jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

Twierdzenie 5. (o równoważnym przekształcaniu układów) *Następujące operacje na wierszach macierzy uzupełnionej U układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:*

1. zamiana między sobą wierszy;

2. mnożenie wiersza przez stałą różną od zera;

3. dodanie do ustalonego wiersza innego wiersza pomnożonego przez stałą;

4. skreślenie wiersza złożonego z samych zer;

5. skreślenie jednego z równych lub proporcjonalnych wierszy;

6. zamiana miejscami dwóch kolumn (przy jednoczesnej zamianie niewiadomych).

Metoda eliminacji Gaussa dla dowolnych układów równań liniowych

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas układ ten rozwiązujemy następująco:

1. budujemy macierz uzupełnioną postaci:

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix};$$

2. na macierzy rozszerzonej dokonujemy równoważnych przekształceń układu sprowadzając ją do postaci:

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{rr+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} \end{bmatrix},$$

przy czym ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpi ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$.

Uwaga 5. Liczba r jest wyznaczona jednoznacznie. Jest to tzw. rząd macierzy.

Wówczas,

a) jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ $AX = B$ jest sprzeczny;

b) jeżeli ostatni wiersz macierzy U' nie pojawi się i $n = r$, to układ $AX = B$ jest oznaczony i jego jedyne rozwiązanie jest postaci

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \\ \;\; \ldots\ldots\ldots \\ x_n = z_n, \end{cases} \quad ;$$

c) jeżeli ostatni wiersz macierzy U' nie pojawi się i $n > r$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony.

Ćwiczenie 6. *Rozwiąż podane układy równań:*

a) $\begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$.