Programowanie liniowe

Algorytm węgierski

- Zagadnienie przydziału
- Opis działania algorytmu

ZAGADNIENIE PRZYDZIAŁU

Najprostszy *problem przydziału* możemy sformułować w następujący sposób:

- Należy przydzielić (obsadzić) n pracowników do wykonywania różnych prac na n stanowiskach. Zakładamy, że jeden pracownik może wykonywać jeden rodzaj pracy.
- Znane są efekty pracy i-tego pracownika na j-tym stanowisku pracy. Mogą to być efekty pozytywne lub negatywne (np. wydajność, liczba braków, czas pracy). Efekty te tworzą macierz kosztów $C = [c_{ij}]$.
- Obsady stanowisk należy dokonać w taki sposób, aby zmaksymalizować pozytywne lub zminimalizować negatywne efekty pracy całego zespołu.

W celu zbudowania modelu matematycznego zagadnienia przydziału, wprowadzamy macierz zmiennych decyzyjnych

$$X = \left[x_{ij}\right]$$

o wymiarach $n \times n$, gdzie x_{ij} oznacza, że i-ty pracownik jest obsadzony do j-tego stanowiska pracy. Przy czym zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko wartości 0 lub 1, tzn.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i\text{-ty pracownik jest przydzielony do } j\text{-tej pracy;} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Przy takich oznaczeniach zagadnienie przydziału ma postać:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \text{min(max)} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \text{(jeden pracownik wykonuje jedną pracę)} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{(jedna praca jest wykonywana przez jednego pracownika)} \\ x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Uwaga 1. Zauważmy, że ograniczenie wartości zmiennych decyzyjnych do 0 lub 1 skutkuje tym, że warunki ograniczające dla dostawców gwarantują, że każdy pracownik może będzie przydzielony tylko do jednej pracy, natomiast warunki dla odbiorców gwarantują, że każda praca będzie wykonywana tylko przez jednego pracownika.

Uwaga 2. Rozwiązanie optymalne składa się wyłącznie z kolumn jednostkowych.

Uwaga 3. Zagadnienie przydziału jest programem liniowym, więc może być rozwiązane za pomocą algorytmu sympleks. Rachunki będą jednak bardzo pracochłonne.

Uwaga 4. Przyjmując w powyższym programie liniowym typowe warunki brzegowe, tzn. $x_{ij} \geqslant 0$ dla każdego (i, j) otrzymujemy zamknięte zagadnienie transportowe, które można rozwiązać za pomocą algorytmu transportowego. Okazuje się, że w rozwiązaniu optymalnym zachowane będą oryginalne warunki brzegowe. A więc będzie ono rozwiązaniem optymalnym problemu przydziału.

Zilustrujemy *Uwagę 4* na przykładzie. Załóżmy, że koszty przydziału zawiera następująca tablica:

	9	1	7	3
	3	5	2	1
	8	4	4	5
	7	5	3	2

Nie piszemy wielkości podaży i popytu, bo wszystkie są równe jeden.

Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne wyznaczamy metodą minimalnego elementu, a następnie stosujemy algorytm transportowy.

Dostajemy:

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & & & u_i \\
\hline
 & 9 & 1^1 & 7 & 3 & 0 \\
 & 3 & 5 & 2 & 1^1 & 1 \\
 & 8^1 & 4^0 & 4^0 & 5 & 3 \\
 & 7 & 5 & 3^1 & 2^0 & 2 \\
\hline
v_j & 5 & 1 & 1 & 0 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 4 & 0^1 & 6 & 3 \\
 & -3^t & 3 & 0 & 0^{1-t} \\
 & 0^{1-t} & 0^0 & 0^{0+t} & 2 \\
 & 0 & 2 & 0^{1-t} & 0^{0+t}
\end{array}
$$

Powyższe rozwiązanie nie jest optymalne. Przyjmujemy $t = 1$ i tworzymy nowe rozwiązanie.

Dostajemy rozwiązanie optymalne. Mamy

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & u_i \\ \hline & 4 & 0^1 & 6 & 3 & 0 \\ & -3^1 & 3 & 0 & 0^0 & 0 \\ & 0^{\mathsf{X}} & 0^0 & 0^1 & 2 & 0 \\ & 0 & 2 & 0^0 & 0^1 & 0 \\ \hline v_j & -3 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ \hline & 7 & 0^1 & 6 & 3 \\ & 0^1 & 3 & 0 & 0^0 \\ & 3 & 0^0 & 0^1 & 2 \\ & 3 & 2 & 0^0 & 0^1 \end{array}$$

Otrzymane rozwiązanie optymalne problemu transportowego spełnia ograniczenia i warunki brzegowe problemu przydziału, więc jest też rozwiązaniem optymalnym początkowego problemu.

OPIS DZIAŁANIA ALGORYTMU WĘGIERSKIEGO

Zagadnienie przydziału może zostać rozwiązane przez zastosowanie *algorytmu węgierskiego*. Jest to bardzo prosty algorytm oparty na pracy węgierskiego matematyka Denesa Königa i dopracowany przez Harolda Kuhna w 1955 roku.

Jego działanie opiera się na iteracyjnym wykonywaniu poniższych czterech kroków.

Krok 1. Punktem wyjścia algorytmu jest takie *przekształcenie macierzy kosztów* $C = [c_{ij}]$*, aby w każdym wierszu i w każdej kolumnie znajdowało się co najmniej jedno zero*. W tym celu od każdego wiersza macierzy C odejmujemy jego minimum, a następnie od każdej kolumny odejmujemy jej minimum.

Krok 2. W przekształconej macierzy kosztów *skreślamy wszystkie wiersze i kolumny zawierające zera, możliwie najmniejszą liczbą linii poziomych lub pionowych*. Jeżeli liczba skreśleń jest równa stopniowi macierzy, tzn. n, to można wyznaczyć rozwiązanie optymalne - przechodzimy do *kroku 3*. Jeżeli liczba skreśleń jest mniejsza niż n - przechodzimy do *kroku 4*.

Krok 3. Tworzymy rozwiązanie optymalne $X = [x_{ij}]$ pamiętając o tym, że x_{ij} może być równe 1 tylko wtedy, gdy $c_{ij} = 0$ w przekształconej macierzy kosztów, i że w każdym wierszu i w każdej kolumnie macierzy X może wystąpić tylko jedna jedynka.

Krok 4. Znajdujemy minimum ze wszystkich nieskreślonych elementów i następnie:
- odejmujemy go od elementów nieskreślonych;
- dodajemy go do elementów podwójnie skreślonych;
- wracamy do *kroku 2*.

Uwaga 5. Metoda węgierska *ma zastosowanie wyłącznie do rozwiązywania problemów minimalizacji*. W przypadku problemu maksymalizacji należy przekształcić macierz kosztów, np. mnożąc ją przez -1 lub odejmując od największego jej elementu wszystkie pozostałe.

Uwaga 6. Metoda węgierska zakłada, że *macierz kosztów jest kwadratowa*. Jeżeli tak nie jest należy dodać fikcyjnego pracownika lub fikcyjne stanowisko pracy z zerowymi kosztami.

Uwaga 7. W praktyce zdarza się, że pewne przydziały sa niedopuszczalne, gdy np. i-ty pracownik nie posiada kompetencji do wykonywania j-tej pracy, tzn. musi być $x_{ij} = 0$ w macierzy X. Wtedy przyjmujemy, że $c_{ij} = M$, gdzie M oznacza dużą liczbę, której nie będzie można wyzerować na skutek przekształceń.

Przykład 1. Rozwiążemy podany wcześniej przykład metodą węgierską. Rozpoczynamy od wykonania kroku 1. Mamy

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & & & \\
\hline
 & 9 & 1 & 7 & 3 & 1 \\
 & 3 & 5 & 2 & 1 & 1 \\
 & 8 & 4 & 4 & 5 & 4 \\
 & 7 & 5 & 3 & 2 & 2
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 8 & 0 & 6 & 2 \\
 & 2 & 4 & 1 & 0 \\
 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
\hline
 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 6 & 0 & 6 & 2 \\
 & 0 & 4 & 1 & 0 \\
 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
 & 3 & 3 & 1 & 0
\end{array}
$$

Przechodzimy do kroku 2. Dostajemy

$$\begin{array}{cccc} 6 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

Liczba skreśleń jest równa stopniowi macierzy, wiec można skonstruować rozwiązanie optymalne. Przechodzimy do kroku 3. Rozwiązanie jest postaci:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Przykład 2. W pewnym dużym przedsiębiorstwie cztery sekretarki należy przydzielić do prowadzenia czterech różnych prac biurowych. Na podstawie obserwacji oszacowano czas (w min.) potrzebny tym sekretarkom do wykonania poszczególnych prac (dane w tabeli poniżej).

	P_1	P_2	P_3	P_4	Prace
S_1	420	480	240	360	
S_2	480	420	300	360	
S_3	420	540	300	420	
S_4	360	480	360	480	
Sekretarki					

Zakładając, że każda sekretarka będzie wykonywać tylko jedną pracę, określić optymalny przydział minimalizujący łączny czas wykonania prac.

Rozwiązanie. Przechodzimy do kroku 1. Mamy

$$\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & \\ \hline & 420 & 480 & 240 & 360 & 240 \\ & 480 & 420 & 300 & 360 & 300 \\ & 420 & 540 & 300 & 420 & 300 \\ & 360 & 480 & 360 & 480 & 360 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ \hline & 180 & 240 & 0 & 120 \\ & 180 & 120 & 0 & 60 \\ & 120 & 240 & 0 & 120 \\ & 0 & 120 & 0 & 120 \\ \hline & 0 & 120 & 0 & 60 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{c|cccc} & & & & \\ \hline & 180 & 120 & 0 & 60 \\ & 180 & 0 & 0 & 0 \\ & 120 & 120 & 0 & 60 \\ & 0 & 0 & 0 & 60 \end{array}$$

Przechodzimy do kroku 2. Dostajemy

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 180 & 120 & 0 & 60 \\
 & 180 & 0 & 0 & 0 \\
 & 120 & 120 & 0 & 60 \\
 & 0 & 0 & 0 & 60
\end{array}$$

Liczba skreśleń jest mniejsza niż 4, więc przechodzimy do kroku 4. Najmniejszy nieskreślony element to $c_{14} = 60$.

Wykonujemy krok 4 i otrzymujemy:

120	60	0	0
180	0	60	0
60	60	0	0
0	0	60	60

Liczba skreśleń jest równa 4, wiec można skonstruować rozwiązanie optymalne. Przechodzimy do kroku 3. Mamy dwa rozwiązania postaci:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$