1 Laboratorium do wykładu 1.

1.1 Metoda bisekcji

Ćwiczenie 2.(wszystkie zadania pochodzą z wykładu)

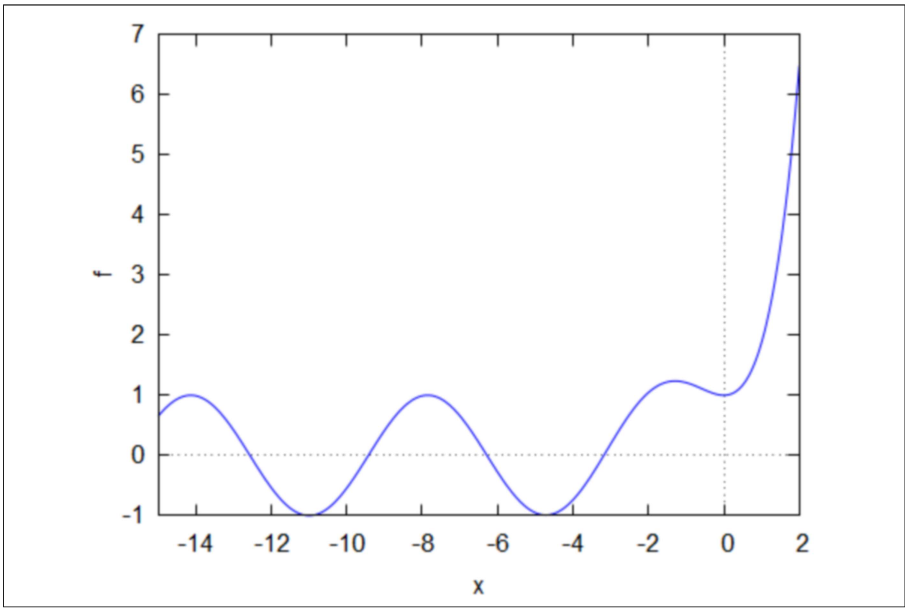
Przenosimy wszystko na jedną stronę i tworzymy funkcje f:

```
(%i1) f(x):=%e^x-sin(x);
```

(%o1) $f(x):=\%e^{x}-\sin(x)$

Robimy wykres funkcji f

```
(%i4) wxplot2d([f], [x,-15,2])$
```

(%t4) 

Widać, że pierwiastek najbliższy zera jest w przedziale [-4,-2]. Będzie to dla nas przedział "startowy".

```
(%i15) a:-4;
b:-2;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) −4
(b) −2
(c) −3
(%o13) −0.738486856419194
(%o14) 0.1909070764277312
(%o15) 1.044632710062294

Widać, że f(a)f(c)<0, a to oznacza, że pierwiastek jest w przedziale [a,c]=[-4,-3]. Kontunuujemy rachunki dla tego przedziału.

```
(%i21) a:-4;
       b:-3;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) -4

(b) -3

(c) $-\frac{7}{2}$

(%o19) -0.738486856419194

(%o20) -0.3205858442673014

(%o21) 0.1909070764277312

Teraz jest f(c)f(b)<0, czyli pierwiastek jest w drugiej połówce przedziału [-4,-3], tzn. w przedziale [-7/2,-3]. Dla tego przedziału kontynuujemy rachunki.

```
(%i27) a:-7/2;
       b:-3;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) $-\frac{7}{2}$

(b) -3

(c) $-\frac{13}{4}$

(%o25) -0.3205858442673014

(%o26) -0.06942092669838637

(%o27) 0.1909070764277312

Pierwiastek jest w drugiej połówce.

```
(%i33) a:-13/4;
       b:-3;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) $-\frac{13}{4}$

(b) -3

(c) $-\frac{25}{8}$

(%o31) −0.06942092669838637

(%o32) 0.06052882585275533

(%o33) 0.1909070764277312

Pierwiastek jest w pierwszej połówce.

```
(%i39) a:-13/4;
       b:-25/8;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) $-\frac{13}{4}$

(b) $-\frac{25}{8}$

(c) $-\frac{51}{16}$

(%o37) −0.06942092669838637

(%o38) −0.004616293886982148

(%o39) 0.06052882585275533

(%i45)
```
a:−51/16;
b:−25/8;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) $-\frac{51}{16}$

(b) $-\frac{25}{8}$

(c) $-\frac{101}{32}$

(%o43) −0.004616293886982148

(%o44) 0.02792831469829528

(%o45) 0.06052882585275533

(%i51)
```
a:−51/16;
b:−101/32;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) $-\frac{51}{16}$

(b) $-\frac{101}{32}$

(c) $-\frac{203}{64}$

(%o49) −0.004616293886982148

(%o50) 0.01164719657871718

(%o51) 0.02792831469829528

(%i57)
```
a:−51/16;
b:−203/64;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) $-\frac{51}{16}$

(b) $-\frac{203}{64}$

(c) $-\frac{407}{128}$

(%o55) −0.004616293886982148

(%o56) 0.003513019573906047

(%o57) 0.01164719657871718

(%i63)
```
a:-51/16;
b:-407/128;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) $-\frac{51}{16}$

(b) $-\frac{407}{128}$

(c) $-\frac{815}{256}$

(%o61) -0.004616293886982148

(%o62) $-5.5227364047606\ 10^{-4}$

(%o63) 0.003513019573906047

(%i69)
```
a:-815/256;
b:-407/128;
c:(a+b)/2;
f(a),numer;
f(c),numer;
f(b),numer;
```

(a) $-\frac{815}{256}$

(b) $-\frac{407}{128}$

(c) $-\frac{1629}{512}$

(%o67) $-5.5227364047606\ 10^{-4}$

(%o68) 0.001480217413369803

(%o69) 0.003513019573906047

```
(%i75) a:−815/256;
       b:−1629/512;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) $-\frac{815}{256}$

(b) $-\frac{1629}{512}$

(c) $-\frac{3259}{1024}$

(%o73) $-5.5227364047606\ 10^{-4}$

(%o74) $4.639325521556964\ 10^{-4}$

(%o75) 0.001480217413369803

```
(%i81) a:−815/256;
       b:−3259/1024;
       c:(a+b)/2;
       f(a),numer;
       f(c),numer;
       f(b),numer;
```

(a) $-\frac{815}{256}$

(b) $-\frac{3259}{1024}$

(c) $-\frac{6519}{2048}$

(%o79) $-5.5227364047606\ 10^{-4}$

(%o80) $-4.418043347738376\ 10^{-5}$

(%o81) $4.639325521556964\ 10^{-4}$

Mamy f(c)<10^(-4), zatem osiągneliśmy zadaną dokładność i kończymy rachunki. Przybliżeniem szukanego pierwiastka jest:

```
(%i83) c;
       c,numer;
```

(%o82) $-\frac{6519}{2048}$

(%o83) -3.18310546875

```
(%i85) kill(all);
```

(%o0) *done*

1.2 Metoda Newtona

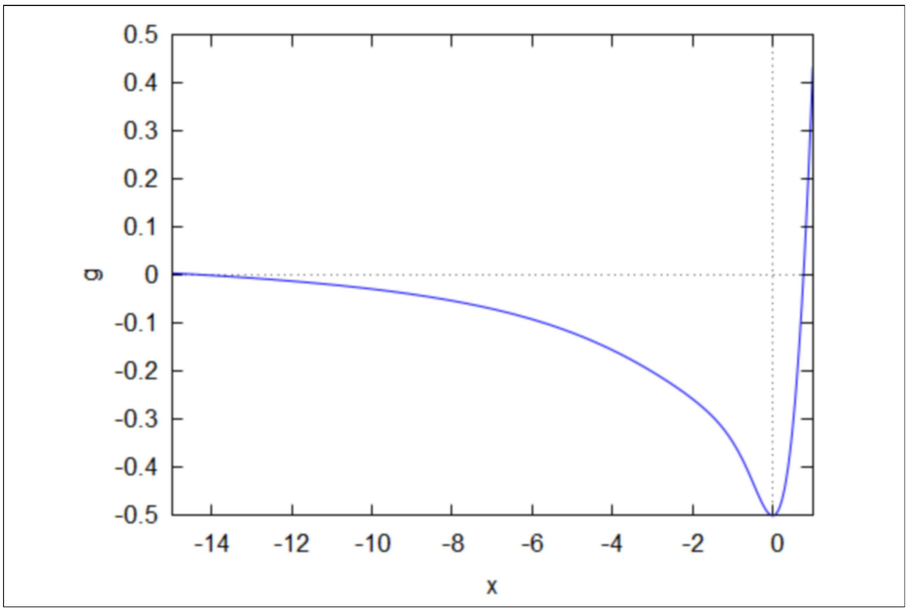
Ćwiczenie 5.

Zaczynamy od narysowania wykresu funkcji g.

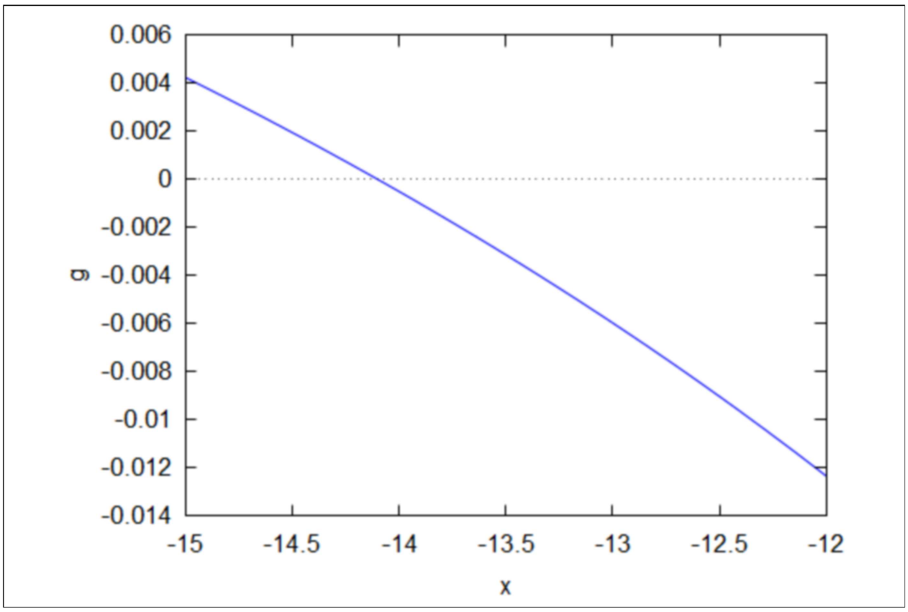
(%i1) g(x):=%e^x−1.5−atan(x);

(%o1) $g(x):=\%e^{x}-1.5-\mathrm{atan}(x)$

(%i6) wxplot2d([g], [x,−15,1])$

(%t6) 

(%i7) wxplot2d([g], [x,−15,−12])$

(%t7) 

Widać, że ujemny pierwiastek jest w pobliżu -14. Dobrze, więc będzie przyjąć jako pierwsze przybliżenie x_0=-14.

W metodzie Newtona potrzebna jest pochodna, więc obliczamy ją i oznaczamy przez dg(x):

(%i8)
```
dg(x):=''(diff(g(x),x));
```

(%o8) $\mathrm{dg}(x):=\%e^{x}-\frac{1}{x^2+1}$

Tworzymy procedurę iteracyjną Newtona według wzoru ze str. 10.

(%i12)
```
x[0]:-14;
x[n]:=x[n-1]-g(x[n-1])/dg(x[n-1]);
```

(x[0]) -14

(x[n]) $x_n:=x_{n-1}-\frac{g(x_{n-1})}{\mathrm{dg}(x_{n-1})}$

Wypiszemy 10 pierwszych przybliżeń szukanego pierwiastka, czyli 10 pierwszych wyrazów ciągu x_n:

(%i15)
```
makelist(display(x[n]),n,0,9),numer;
```

$x_0=-14$

$x_1=-14.10054684364473$

$x_2=-14.10126973589681$

$x_3=-14.10126977273998$

$x_4=-14.10126977273994$

$x_5=-14.10126977273994$

$x_6=-14.10126977273994$

$x_7=-14.10126977273994$

$x_8=-14.10126977273994$

$x_9=-14.10126977273994$

(%o15) *[done, done, done, done, done, done, done, done, done, done]*

Widać, że począwszy od x_4 te przybliżenia już się nie zmieniają. Wydaje się, że x_4 ma już zadaną dokładność. Sprawdzimy kryterium stopu (str. 11):

(%i18)
```
i:4;
x[i],numer;
abs(g(x[i]))+abs(x[i]-x[i-1]),numer;
```

(i) 4

(%o17) -14.10126977273994

(%o18) $4.440892098500626\ 10^{-14}$

Mamy przekroczoną zadaną dokładność. Jest dokładnych 13 cyfr po przecinku.

(%i19) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 6.

Pierwiastek z 26 możemy przybliżyć stosując metodę Newtona dla funkcji f(x)=x^2-26 (to będzie jej dodatnie miejsce zerowe). Za pierwsze przybliżenie przyjmujemy: x_0=5. Mamy:

(%i1) f(x):=x^2−26;

(%o1) $\mathrm{f}(x):=x^2-26$

(%i2) df(x):=''(diff(f(x),x));

(%o2) $\mathrm{df}(x):=2x$

(%i4) x[0]:5;
x[n]:=x[n−1]−f(x[n−1])/df(x[n−1]);

(x[0]) 5

(x[n]) $x_n:=x_{n-1}-\frac{\mathrm{f}(x_{n-1})}{\mathrm{df}(x_{n-1})}$

Obliczamy kolejne przybliżenia pierwiastka i obserwujemy kryterium stopu:

(%i10) i:1;
x[i],numer;
abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;

(i) 1

(%o9) 5.1

(%o10) 0.1099999999999977

(%i13) i:2;
x[i],numer;
abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;

(i) 2

(%o12) 5.099019607843137

(%o13) $9.813533256393114\ 10^{-4}$

(%i16) i:3;
x[i],numer;
abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;

(i) 3

(%o15) 5.099019513592785

(%o16) $9.425035862875575\ 10^{-8}$

```
(%i19) i:4;
       x[i],numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]-x[i-1]),numer;
```

(i) 4

(%o18) 5.099019513592784

(%o19) $4.440892098500626\ 10^{-15}$

```
(%i22) i:5;
       x[i],numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]-x[i-1]),numer;
```

(i) 5

(%o21) 5.099019513592784

(%o22) $3.552713678800501\ 10^{-15}$

```
(%i25) i:6;
       x[i],numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]-x[i-1]),numer;
```

(i) 6

(%o24) 5.099019513592784

(%o25) $3.552713678800501\ 10^{-15}$

Widać, że nie możemy uzyskać lepszej dokładności (14 cyfr po przecinku takich samych) niż w x_5. Przyjmujemy x_5 za rozwiązanie.

Sprawdzimy jeszcze jakie rozwiązanie generuje wzór Herona:

```
(%i27) y[0]:5;
       y[n]:=1/2·(y[n-1]+26/y[n-1]);
```

(y[0]) 5

(y[n]) $y_n := \frac{1}{2}\left(y_{n-1} + \frac{26}{y_{n-1}}\right)$

```
(%i29) makelist(display(y[n]),n,0,7),numer;
```

$y_0=5$

$y_1=5.1$

$y_2=5.099019607843138$

$y_3=5.099019513592786$

$y_4=5.099019513592784$

$y_5=5.099019513592784$

$y_6=5.099019513592784$

$y_7=5.099019513592784$

(%o29) $[done,done,done,done,done,done,done,done]$

Otrzymujemy dokładnie takie samo rozwiązanie.

(%i30) kill(all);
(%o0) *done*

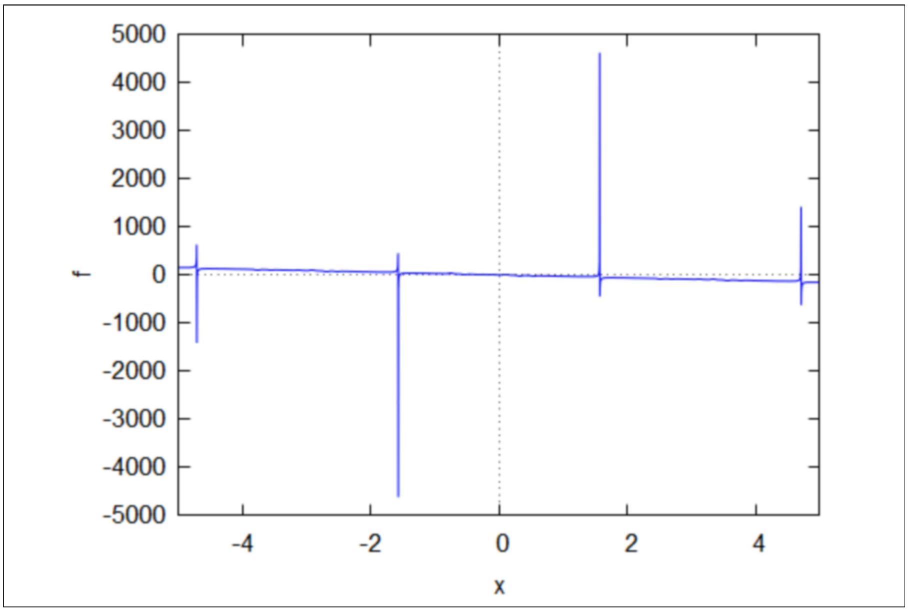
1.3 Metoda siecznych

Ćwiczenie 8.

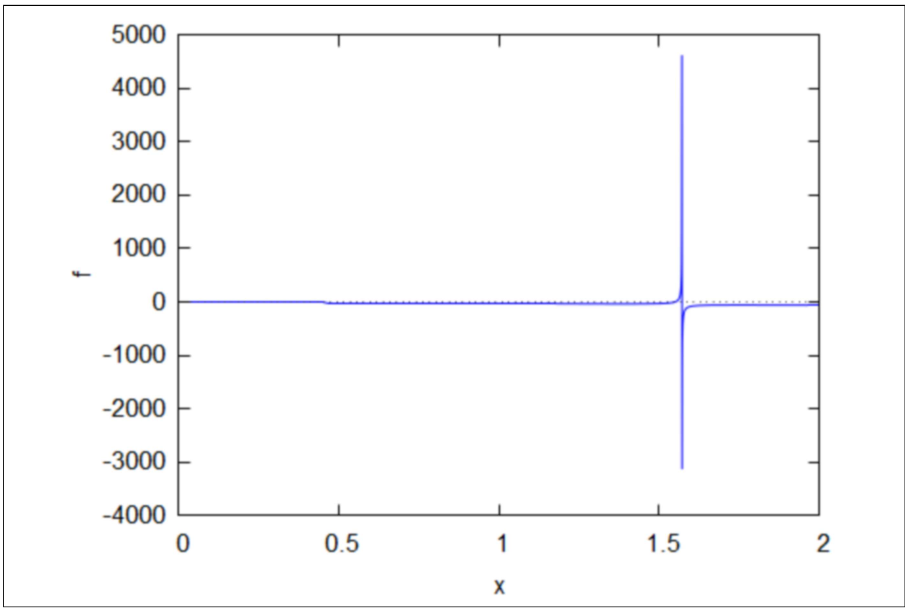
(%i1) f(x):=tan(x)−30·x;
(%o1) $f(x):=\tan(x)-30\,x$

Wykonujemy wykres i wstępną lokalizację pierwiastka:

(%i2) wxplot2d([f], [x,−5,5])$

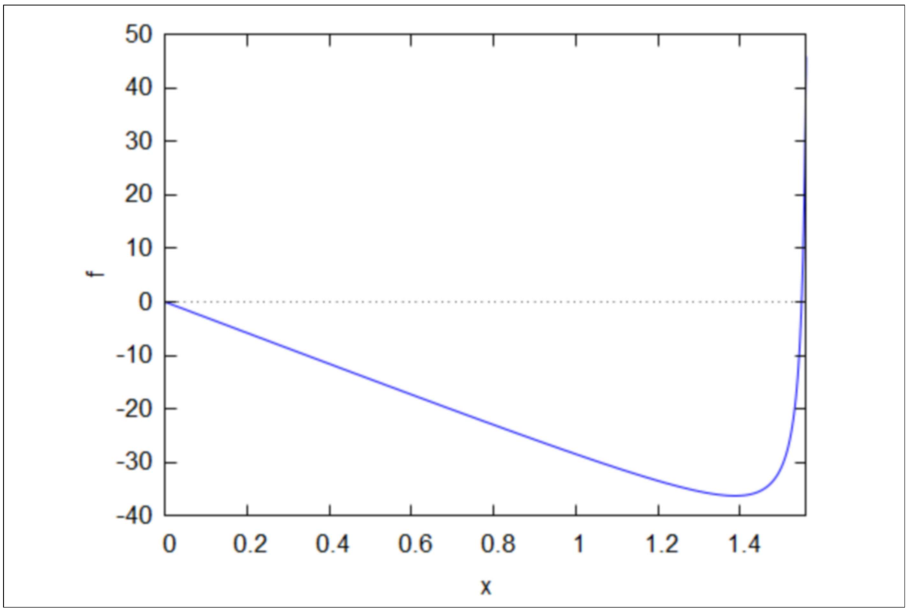
(%t2)


(%i3) wxplot2d([f], [x,0,2])$

(%t3)


(%i8) wxplot2d([f], [x,0,1.56])$

(%t8)



W metodzie siecznych należy określić dwa pierwsze przybliżenia szukanego pierwiastka. Przyjmujemy: x_0=1.4, x_1=1.5 i stoujemy wzór iteracyjny metody (str. 15):

```
(%i11) x[0]:1.4;
       x[1]:1.5;
       x[n]:=x[n−1]−f(x[n−1])·(x[n−1]−x[n−2])/(f(x[n−1])−f(x[n−2]));
```

(x[0]) 1.4

(x[1]) 1.5

(x[n]) $x_n := x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}$

Kryterium stopu przyjmujemy takie samo jak w metodzie Newtona. Obliczamy kolejne przybliżenia pierwiastka i obserwujemy kryterium stopu:

```
(%i24) i:2;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
```

(i) 2

(%o22) 2.082603355629177

(%o23) −64.25830416115654

(%o24) 64.84090751678572

```
(%i32) i:3;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    3
(%o30) 0.9603787380105944
(%o31) −27.38185258486336
(%o32) 28.50407720248194
```

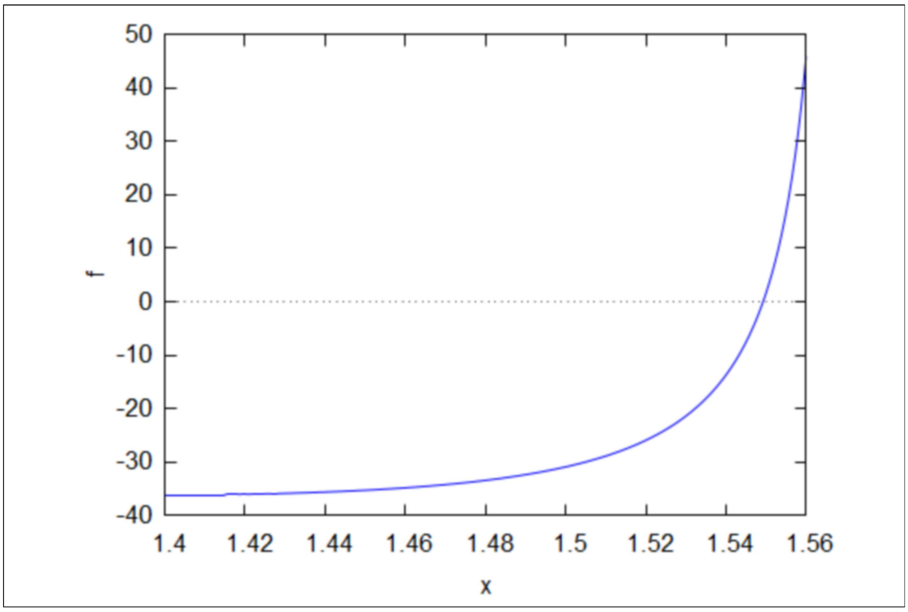
```
(%i36) i:4;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    4
(%o34) 0.1270938710227091
(%o35) −3.685033499642131
(%o36) 4.518318366630016
```

```
(%i40) i:5;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    5
(%o38) −0.002488189698270082
(%o39) 0.07215749611495256
(%o40) 0.2017395568359317
```

Widać, że ciąg x_n nie zbiega do pierwiastka (z rysunku widać, że to ma być około 1.55). Trzeba przyjąć inne punkty początkowe. Zróbmy dokładniejszy rysunek.

```
(%i41) wxplot2d([f], [x,1.4,1.56])$
```

(%t41)



```
(%i13) kill(all);
(%o0) done

(%i1) f(x):=tan(x)−30·x;
```

(%o1) $f(x) := \tan(x) - 30\,x$

```
(%i4) x[0]:1.54;
      x[1]:1.55;
      x[n]:=x[n−1]−f(x[n−1])·(x[n−1]−x[n−2])/(f(x[n−1])−f(x[n−2]));
(x[0]) 1.54
(x[1]) 1.55
```

(x[n]) $x_n := x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})\,(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$

```
(%i8) i:2;
      x[i],numer;
      f(x[i]),numer;
      abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)   2
(%o6) 1.548969480267659
(%o7) −0.6612216017732138
(%o8) 0.6622521215055552

(%i12) i:3;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    3
(%o10) 1.549273717739859
(%o11) −0.02261755156872169
(%o12) 0.0229217890409219

(%i16) i:4;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    4
(%o14) 1.549284492971733
```

(%o15) $3.358855658035509\ 10^{-4}$

(%o16) $3.466607976776448\ 10^{-4}$

```
(%i20) i:5;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    5
(%o18) 1.549284335294047
(%o19) −1.680898478184645 10^−7
(%o20) 3.257675338375066 10^−7

(%i24) i:6;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    6
(%o22) 1.549284335372915
(%o23) −1.129762949858559 10^−12
(%o24) 7.999823026239028 10^−11

(%i28) i:7;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    7
(%o26) 1.549284335372916
(%o27) −1.77635683940025 10^−13
(%o28) 1.780797731498751 10^−13

(%i32) i:8;
       x[i],numer;
       f(x[i]),numer;
       abs(f(x[i]))+abs(x[i]−x[i−1]),numer;
(i)    8
(%o30) 1.549284335372916
(%o31) −1.77635683940025 10^−13
(%o32) 1.77635683940025 10^−13
```

Nie potrzeba dalej kontynuować iterowania. Widać, że x_8 już niczego nie poprawia.
Przyjmujemy x_7 za rozwiązanie. Mamy dokładność do 12 cyfr po
przecinku.