

Twierdzenia o pochodnych

Wykład nr 11 (Inżynieria sanitarna)

- Twierdzenia o wartości średniej
- Reguła de L'Hospitala
- Rozwinięcie Taylora funkcji

Twierdzenie 1. (Roll'a*)

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b) i $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = 0.$$

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a.*

*Michel Rolle (1652-1719) - matematyk francuski

Twierdzenie 2. (Lagrange'a*)

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b) , to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Rysunek 2. *Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a.*

*Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) - matematyk i astronom francuski

Twierdzenie 3. (warunki wystarczające monotoniczności funkcji)

Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek:

- 1. $f'(x) = 0$, to jest stała na I ;*
- 2. $f'(x) > 0$, to jest rosnąca na I ;*
- 3. $f'(x) < 0$, to jest malejąca I .*

Ćwiczenie 1. *Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:*

a) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2};$

b) $f(x) = \sin x + \cos x;$

c) $f(x) = 3x^5 + 5x^3;$

d) $f(x) = x + \cos x.$

Twierdzenie 4. (reguła de L'Hospitala* dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$,

2. istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 1. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz granic w $-\infty$ lub w ∞ .

*Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704) - matematyk francuski.

Ćwiczenie 2. Obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 5x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x^3 - 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 2x}.$

Twierdzenie 5. (reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$)

Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty,$

2. istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 2. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz granic w $-\infty$ lub w ∞ .

Ćwiczenie 3. Obliczyć podane granice:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 3x}{\tan x};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{4x^3 + 2};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln \tan x}.$

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

Nieoznaczoność	Stosowana tożsamość	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}}}{\frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{g}}}$	$\frac{0}{0}$
$1^\infty, \infty^0, 0^0$	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Uwaga 3. Tożsamość podaną dla nieoznaczoności $\infty - \infty$ stosujemy dopiero wtedy, gdy zawiodą inne sposoby jej usuwania.

Ćwiczenie 4. *Obliczyć podane granice:*

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \tan x} \right);$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x .$

Definicja 1. (*wielomiany Taylora** i *Maclaurina*†)

Założmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną rzędu k , gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wielomian

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu k funkcji f w punkcie x_0 .

Dla $x_0 = 0$ wielomian ten nazywamy wielomianem Maclaurina.

*Brook Taylor (1685-1731) - matematyk angielski.

†Colin Maclaurin (1698-1746) - matematyk szkocki.

Twierdzenie 6. (wzór Taylora z resztą Lagrange'a)

Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne do rzędu n włącznie na przedziale $[x_0, x]$, to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Ćwiczenie 5. *Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz n :*

a) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$, $n = 6$;

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

Ćwiczenie 6. *Rozwinąć podane funkcje w szeregi Maclaurina:*

a) $f(x) = e^x$;

b) $g(x) = \ln(1 + x)$.