Labratorium do Wykładu 4

Ćwiczenie 1.
a) Metoda Jacobiego (wykład str. 7)

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B i macierz D, która jest częścią diagonalną macierzy A.

```
-->  A:matrix([4,2,-1],[1,4,1],[2,-1,4]);
     B:matrix([5],[12],[12]);
     D:matrix([4,0,0],[0,4,0],[0,0,4]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
-->  X:matrix([1],[1],[1]);
```

(X) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 3 przez I.

```
-->  I:ident(3);
```

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje. Posłuży nam do porównania szybkości zbiegania poszczególnych metod.

```
-->  i:0;
```

(i) 0

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 1
(x1) 1
(x2) 1
(x3) 1

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.5 \\ 2.75 \end{pmatrix}$

(%o12) 1.75

Zaczynamy iterowanie, aż do uzyskania zadanej dokładności. Macierz główna jest dominująca przekątniowo (str. 9-10), więc mamy pewność, że ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 2
(x1) 1.0
(x2) 2.5
(x3) 2.75

(X) $\begin{pmatrix} 0.6875 \\ 2.0625 \\ 3.125 \end{pmatrix}$

(%o18) 0.4375

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 3
(x1) 0.6875
(x2) 2.0625
(x3) 3.125

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.046875 \\ 3.171875 \end{pmatrix}$

(%o24) 0.3125

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 4

(x1) 1.0

(x2) 2.046875

(x3) 3.171875

(X) $\begin{pmatrix} 1.01953125 \\ 1.95703125 \\ 3.01171875 \end{pmatrix}$

(%o30) 0.16015625

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 5

(x1) 1.01953125

(x2) 1.95703125

(x3) 3.01171875

(X) $\begin{pmatrix} 1.0244140625 \\ 1.9921875 \\ 2.9794921875 \end{pmatrix}$

(%o36) 0.03515625

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) 1.0244140625

(x2) 1.9921875

(x3) 2.9794921875

(X) $\begin{pmatrix} 0.998779296875 \\ 1.9990234375 \\ 2.98583984375 \end{pmatrix}$

(%o42) 0.025634765625

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) 0.998779296875

(x2) 1.9990234375

(x3) 2.98583984375

(X) $\begin{pmatrix} 0.9969482421875 \\ 2.00384521484375 \\ 3.0003662109375 \end{pmatrix}$

(%o48) 0.0145263671875

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) 0.9969482421875

(x2) 2.00384521484375

(x3) 3.0003662109375

(X) $\begin{pmatrix} 0.9981689453125 \\ 2.00067138671875 \\ 3.002487182617188 \end{pmatrix}$

(%o54) 0.003173828125

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 9

(x1) 0.9981689453125

(x2) 2.00067138671875

(x3) 3.002487182617188

(X) $\begin{pmatrix} 1.000286102294922 \\ 1.999835968017578 \\ 3.001083374023438 \end{pmatrix}$

(%o60) 0.002117156982421875

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 10
(x1) 1.000286102294922
(x2) 1.999835968017578
(x3) 3.001083374023438

(X) $\begin{pmatrix} 1.00035285949707 \\ 1.99965763092041 \\ 2.999815940856934 \end{pmatrix}$

(%o66) 0.001267433166503906

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 11
(x1) 1.00035285949707
(x2) 1.99965763092041
(x3) 2.999815940856934

(X) $\begin{pmatrix} 1.000125169754028 \\ 1.999957799911499 \\ 2.999737977981567 \end{pmatrix}$

(%o72) $3.001689910888672\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 12
(x1) 1.000125169754028
(x2) 1.999957799911499
(x3) 2.999737977981567

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999555945396423 \\ 2.000034213066101 \\ 2.99992865100861 \end{pmatrix}$

(%o78) $1.888871192932129\ 10^{-4}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 13
(x1) 0.9999555945396423
(x2) 2.000034213066101
(x3) 2.999926865100861

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999646097421646 \\ 2.000029385089874 \\ 3.000030755996704 \end{pmatrix}$

(%o84) $1.038908958435059\ 10^{-4}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 14
(x1) 0.9999646097421646
(x2) 2.000029385089874
(x3) 3.000030755996704

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999929964542389 \\ 2.000001158565283 \\ 3.000025041401386 \end{pmatrix}$

(%o90) $2.838671207427979\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 15
(x1) 0.9999929964542389
(x2) 2.000001158565283
(x3) 3.000025041401386

(X) $\begin{pmatrix} 1.000005681067705 \\ 1.999995490536094 \\ 3.000003791414201 \end{pmatrix}$

(%o96) $2.124998718500137\ 10^{-5}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 16
(x1) 1.000005681067705
(x2) 1.999995490536094
(x3) 3.000003791414201

(X) $\begin{pmatrix} 1.000003202585503 \\ 1.999997631879523 \\ 2.999996032100171 \end{pmatrix}$

(%o102) $7.759314030408859\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 17
(x1) 1.000003202585503
(x2) 1.999997631879523
(x3) 2.999996032100171

(X) $\begin{pmatrix} 1.000000192085281 \\ 2.000000191328581 \\ 2.999997806677129 \end{pmatrix}$

(%o108) $3.010500222444534\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 18
(x1) 1.000000192085281
(x2) 2.000000191328581
(x3) 2.999997806677129

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999993560049916 \\ 2.000000500309397 \\ 2.999999951789505 \end{pmatrix}$

(%o114) $2.145112375728786\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 19

(x1) 0.9999993560049916

(x2) 2.000000500309397

(x3) 2.999999951789505

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999997377926775 \\ 2.000000173051376 \\ 3.000000447074854 \end{pmatrix}$

(%o120) $4.952853487338871\ 10^{-7}$

W 19stej iteracji otrzymaliśmy zadaną dokładność. Rozwiązanie, po zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku, jest następujące: x1=1, x2:=2, x3=3.

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

b) Metoda Gaussa-Seidela (wykład str. 8)

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B i macierz L, która jest dolną trójkątną częścią macierzy A.

```
→ A:matrix([4,2,−1],[1,4,1],[2,−1,4]);
  B:matrix([5],[12],[12]);
  L:matrix([4,0,0],[1,4,0],[2,−1,4]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

(L) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
X:matrix([1],[1],[1]);
```

(X) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 3 przez I.

```
I:ident(3);
```

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje.

```
i:0;
```

(i) 0

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 1

(x1) 1

(x2) 1

(x3) 1

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.5 \\ 3.125 \end{pmatrix}$

(%o12) 2.125

Zaczynamy iterowanie, aż do uzyskania zadanej dokładności. Macierz główna jest dominująca przekątniowo (str. 9-10), więc mamy
pewność, że ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

```
→   i:i+1;
    x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
    X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
    max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 2

(x1) 1.0

(x2) 2.5

(x3) 3.125

(X) $\begin{pmatrix} 0.78125 \\ 2.0234375 \\ 3.115234375 \end{pmatrix}$

(%o18) 0.4765625

```
→   i:i+1;
    x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
    X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
    max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 3

(x1) 0.78125

(x2) 2.0234375

(x3) 3.115234375

(X) $\begin{pmatrix} 1.01708984375 \\ 1.9669189453125 \\ 2.983184814453125 \end{pmatrix}$

(%o24) 0.23583984375

```
→   i:i+1;
    x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
    X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
    max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 4

(x1) 1.01708984375

(x2) 1.9669189453125

(x3) 2.983184814453125

(X) $\begin{pmatrix} 1.012336730957031 \\ 2.001119613647461 \\ 2.99411153793335 \end{pmatrix}$

(%o30) 0.03420066833496094

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 5

(x1) 1.012336730957031

(x2) 2.001119613647461

(x3) 2.99411153793335

(X) $\begin{pmatrix} 0.9979680776596069 \\ 2.001980096101761 \\ 3.001510985195637 \end{pmatrix}$

(%o36) 0.01436865329742432

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) 0.9979680776596069

(x2) 2.001980096101761

(x3) 3.001510985195637

(X) $\begin{pmatrix} 0.9993876982480288 \\ 1.999775329139084 \\ 3.000249983160757 \end{pmatrix}$

(%o42) 0.002204766962677724

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) 0.9993876982480288

(x2) 1.999775329139084

(x3) 3.000249983160757

(X) $\begin{pmatrix} 1.000174831220647 \\ 1.999893796404649 \\ 2.999886033490839 \end{pmatrix}$

(%o48) $7.87132972618565\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) 1.000174831220647

(x2) 1.999893796404649

(x3) 2.999886033490839

(X) $\begin{pmatrix} 1.000024610170385 \\ 2.000022339084694 \\ 2.999993279685981 \end{pmatrix}$

(%o54) $1.502210502621892\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 9

(x1) 1.000024610170385

(x2) 2.000022339084694

(x3) 2.999993279685981

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999871503791482 \\ 2.000004892483718 \\ 3.000007647931355 \end{pmatrix}$

(%o60) $3.745979123692678\ 10^{-5}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 10

(x1) 0.9999871503791482

(x2) 2.000004892483718

(x3) 3.000007647931355

(X) $\begin{pmatrix} 0.99999946574098 \\ 1.999998221581916 \\ 2.999999822524989 \end{pmatrix}$

(%o66) $1.231536183177173\ 10^{-5}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 11

(x1) 0.99999946574098

(x2) 1.999998221581916

(x3) 2.999999822524989

(X) $\begin{pmatrix}1.000000844840289\\1.999999833158681\\2.999999535869526\end{pmatrix}$

(%o72) $1.611576764481981\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 12

(x1) 1.000000844840289

(x2) 1.999999833158681

(x3) 2.999999535869526

(X) $\begin{pmatrix}0.9999999673880411\\2.000000124185608\\3.000000047352382\end{pmatrix}$

(%o78) $8.774522481935776\ 10^{-7}$

Zadaną dokładność mamy szybciej, bo już w 12stej iteracji. Rozwiązanie, po zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku, jest następujące: x1=1, x2=2, x3=3.

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

c) Metoda nadrelaksacji SOR (wykład str. 11)

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B, macierz D, która jest częścią diagonalną macierzy A i macierz L, która jest ściśle dolną trójkątną częścią macierzy A (tzn. ma na przekątnej zera).

```
A:matrix([4,2,−1],[1,4,1],[2,−1,4]);
B:matrix([5],[12],[12]);
D:matrix([4,0,0],[0,4,0],[0,0,4]);
L:matrix([0,0,0],[1,0,0],[2,−1,0]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(L) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Przyjmuję w=1.04 i tworzę macierz Q.

```
w:1.04;
Q:(1/w)·D+L;
```

(w) 1.04

(Q) $\begin{pmatrix} 3.846153846153846 & 0 & 0 \\ 1 & 3.846153846153846 & 0 \\ 2 & -1 & 3.846153846153846 \end{pmatrix}$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
X:matrix([1],[1],[1]);
```

(X) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 3 przez I.

```
I:ident(3);
```

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje.

```
→ i:0;
(i) 0
```

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
(i) 1
(x1) 1
(x2) 1
(x3) 1
```

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 2.56 \\ 3.2256 \end{pmatrix}$

(%o15) 2.2256

Zaczynamy iterowanie, aż do uzyskania zadanej dokładności. Macierz główna jest dominująca przekątniowo (str. 9-10), więc mamy
pewność, że ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
(i) 2
(x1) 1.0
(x2) 2.56
(x3) 3.2256
```

(X) $\begin{pmatrix} 0.767456 \\ 1.97940544 \\ 3.1065442944 \end{pmatrix}$

(%o21) 0.5805945600000002

```
-->  i:i+1;
     x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
     X:(I-invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
     max(abs(x1-X[1,1]),abs(x2-X[2,1]),abs(x3-X[3,1])),numer;
```

(i) 3
(x1) 0.767456
(x2) 1.97940544
(x3) 3.1065442944

(X) $\begin{pmatrix} 1.047712447744 \\ 1.96071702944256 \\ 2.960714183052186 \end{pmatrix}$

(%o27) 0.2802564477440003

```
-->  i:i+1;
     x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
     X:(I-invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
     max(abs(x1-X[1,1]),abs(x2-X[2,1]),abs(x3-X[3,1])),numer;
```

(i) 4
(x1) 1.047712447744
(x2) 1.96071702944256
(x3) 2.960714183052186

(X) $\begin{pmatrix} 1.008304334373677 \\ 2.009626504291573 \\ 2.99975606991941 \end{pmatrix}$

(%o33) 0.04890947484901353

```
-->  i:i+1;
     x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
     X:(I-invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
     max(abs(x1-X[1,1]),abs(x2-X[2,1]),abs(x3-X[3,1])),numer;
```

(i) 5
(x1) 1.008304334373677
(x2) 2.009626504291573
(x3) 2.99975606991941

(X) $\begin{pmatrix} 0.9945986225724814 \\ 2.001082719780445 \\ 3.00309998060845 \end{pmatrix}$

(%o39) 0.01370571180119562

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) 0.9945986225724814

(x2) 2.001082719780445

(x3) 3.00309998060845

(X) $\begin{pmatrix} 1.000459035769466 \\ 1.999031346950524 \\ 2.999385452382676 \end{pmatrix}$

(%o45) 0.005860413196984604

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) 1.000459035769466

(x2) 1.999031346950524

(x3) 2.999385452382676

(X) $\begin{pmatrix} 1.000325555774445 \\ 2.000113884001127 \\ 2.999884902742275 \end{pmatrix}$

(%o51) 0.001082537050603127

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) 1.000325555774445

(x2) 2.000113884001127

(x3) 2.999884902742275

(X) $\begin{pmatrix} 0.9998978328014276 \\ 2.000051933398592 \\ 3.000071233517201 \end{pmatrix}$

(%o57) $4.27722973016964\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 9

(x1) 0.9998978328014276

(x2) 2.00051933398592

(x3) 3.000071233517201

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999956020351471 \\ 1.999980545420446 \\ 2.999994379410352 \end{pmatrix}$

(%o63) $9.776923371951352\ 10^{-5}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 10

(x1) 0.9999956020351471

(x2) 1.999980545420446

(x3) 2.999994379410352

(X) $\begin{pmatrix} 1.000008830946654 \\ 1.999999943490361 \\ 2.99999561803882 \end{pmatrix}$

(%o69) $1.939806991479998\ 10^{-5}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
  X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 11

(x1) 1.000008830946654

(x2) 1.999999943490361

(x3) 2.99999561803882

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999985368372396 \\ 2.00000152199261 \\ 3.000001331841162 \end{pmatrix}$

(%o75) $1.029410941433273\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 12

(x1) 0.9999985368372396

(x2) 2.00000152199261

(x3) 3.000001331841162

(X) $\begin{pmatrix} 0.9999996133690553 \\ 1.999999693365639 \\ 3.000000068049511 \end{pmatrix}$

(%o81) $1.828626971178693\ 10^{-6}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1])),numer;
```

(i) 13

(x1) 0.9999996133690553

(x2) 1.999999693365639

(x3) 3.000000068049511

(X) $\begin{pmatrix} 1.000000192607978 \\ 1.999999944494427 \\ 2.999999882690422 \end{pmatrix}$

(%o87) $5.792389231595862\ 10^{-7}$

Osiągnęliśmy zadaną dokładność w 13stej iteracji. Rozwiązanie, po zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku, jest postaci: x1=1, x2=2, x3=3.

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 2.

a) Metoda Jacobiego

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B i macierz D, która jest częścią diagonalną macierzy A.

```
A:matrix([4,1,0,1],[1,5,1,0],[0,1,6,1],[1,0,1,4]);
B:matrix([4],[7],[16],[14]);
D:matrix([4,0,0,0],[0,5,0,0],[0,0,6,0],[0,0,0,4]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
X:matrix([0],[0],[0],[0]);
```

(X) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 4 przez I.

```
I:ident(4);
```

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje. Posłuży nam do porównania szybkości zbiegania poszczególnych metod.

```
i:0;
```

(i) 0

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 1

(x1) 0

(x2) 0

(x3) 0

(x4) 0

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.4 \\ 2.666666666666667 \\ 3.5 \end{pmatrix}$

(%o13) 3.5

Zaczynamy iterowanie, aż do uzyskania zadanej dokładności. Macierz główna jest dominująca przekątniowo (str. 9-10), więc mamy pewność, że ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 2

(x1) 1.0

(x2) 1.4

(x3) 2.666666666666667

(x4) 3.5

(X) $\begin{pmatrix} -0.2250000000000001 \\ 0.6666666666666667 \\ 1.85 \\ 2.583333333333333 \end{pmatrix}$

(%o20) 1.225

```
-->  i:i+1;
     x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
     X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
     max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 3

(x1) −0.2250000000000001

(x2) 0.6666666666666667

(x3) 1.85

(x4) 2.583333333333333

(X) $\begin{pmatrix} 0.1875 \\ 1.075 \\ 2.125 \\ 3.09375 \end{pmatrix}$

(%o27) 0.5104166666666665

```
-->  i:i+1;
     x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
     X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
     max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 4

(x1) 0.1875

(x2) 1.075

(x3) 2.125

(x4) 3.09375

(X) $\begin{pmatrix} -0.04218750000000004 \\ 0.9375000000000001 \\ 1.971875 \\ 2.921875 \end{pmatrix}$

(%o34) 0.2296875

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 5

(x1) −0.04218750000000004

(x2) 0.9375000000000001

(x3) 1.971875

(x4) 2.921875

(X) $\begin{pmatrix} 0.03515625 \\ 1.0140625 \\ 2.0234375 \\ 3.017578125 \end{pmatrix}$

(%o41) 0.095703125

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) 0.03515625

(x2) 1.0140625

(x3) 2.0234375

(x4) 3.017578125

(X) $\begin{pmatrix} -0.007910156249999911 \\ 0.9882812500000001 \\ 1.9947265625 \\ 2.9853515625 \end{pmatrix}$

(%o48) 0.04306640624999991

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) −0.007910156249999911

(x2) 0.9882812500000001

(x3) 1.9947265625

(x4) 2.9853515625

(X) $\begin{pmatrix} 0.006591796875 \\ 1.00263671875 \\ 2.00439453125 \\ 3.0032958984375 \end{pmatrix}$

(%o55) 0.0179443359375

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) 0.006591796875

(x2) 1.00263671875

(x3) 2.00439453125

(x4) 3.0032958984375

(X) $\begin{pmatrix} -0.001483154296875178 \\ 0.9978027343750001 \\ 1.99901123046875 \\ 2.99725341796875 \end{pmatrix}$

(%o62) 0.008074951171875178

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I-invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1-X[1,1]),abs(x2-X[2,1]),abs(x3-X[3,1]),abs(x4-X[4,1])),numer;
```

(i) 9
(x1) −0.001483154296875178
(x2) 0.9978027343750001
(x3) 1.99901123046875
(x4) 2.99725341796875

(X) $\begin{pmatrix} 0.0012359619140625 \\ 1.000494384765625 \\ 2.000823974609375 \\ 3.000617980957031 \end{pmatrix}$

(%o69) 0.00336456298828125

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I-invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1-X[1,1]),abs(x2-X[2,1]),abs(x3-X[3,1]),abs(x4-X[4,1])),numer;
```

(i) 10
(x1) 0.0012359619140625
(x2) 1.000494384765625
(x3) 2.000823974609375
(x4) 3.000617980957031

(X) $\begin{pmatrix} -2.780914306641513\ 10^{-4} \\ 0.9995880126953126 \\ 1.99981460571289 \\ 2.999485015869141 \end{pmatrix}$

(%o76) 0.001514053344726651

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 11

(x1) $-2.780914306641513\ 10^{-4}$

(x2) 0.9995880126953126

(x3) 1.99981460571289

(x4) 2.999485015869141

(X) $\begin{pmatrix} 2.317428588867188\ 10^{-4} \\ 1.000092697143555 \\ 2.000154495239258 \\ 3.000115871429443 \end{pmatrix}$

(%o83) $6.308555603027344\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
  x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
  X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
  max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 12

(x1) $2.317428588867188\ 10^{-4}$

(x2) 1.000092697143555

(x3) 2.000154495239258

(x4) 3.000115871429443

(X) $\begin{pmatrix} -5.214214324955613\ 10^{-5} \\ 0.9999227523803712 \\ 1.999965238571167 \\ 2.999903440475464 \end{pmatrix}$

(%o90) $2.838850021362749\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 13

(x1) $-5.214214324955613\ 10^{-5}$

(x2) 0.9999227523803712

(x3) 1.999965238571167

(x4) 2.999903440475464

(X) $\begin{pmatrix} 4.345178604125977\ 10^{-5} \\ 1.000017380714417 \\ 2.000028967857361 \\ 3.000021725893021 \end{pmatrix}$

(%o97) $1.182854175567627\ 10^{-4}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 14

(x1) $4.345178604125977\ 10^{-5}$

(x2) 1.000017380714417

(x3) 2.000028967857361

(x4) 3.000021725893021

(X) $\begin{pmatrix} -9.776651859194629\ 10^{-6} \\ 0.9999855160713197 \\ 1.999993482232094 \\ 2.999981895089149 \end{pmatrix}$

(%o104) $5.32284379004544\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 15

(x1) $-9.776651859194629\ 10^{-6}$

(x2) 0.9999855160713197

(x3) 1.999993482232094

(x4) 2.999981895089149

(X) $\begin{pmatrix} 8.147209882736206\ 10^{-6} \\ 1.000003258883953 \\ 2.000005431473255 \\ 3.000004073604941 \end{pmatrix}$

(%o111) $2.217851579189301\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 16

(x1) $8.147209882736206\ 10^{-6}$

(x2) 1.000003258883953

(x3) 2.000005431473255

(x4) 3.000004073604941

(X) $\begin{pmatrix} -1.833122223571237\ 10^{-6} \\ 0.9999972842633725 \\ 1.999998777918517 \\ 2.999996605329216 \end{pmatrix}$

(%o118) $9.980332106307443\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 17

(x1) $-1.833122223571237\ 10^{-6}$

(x2) 0.9999972842633725

(x3) 1.999998777918517

(x4) 2.999996605329216

(X) $\begin{pmatrix} 1.527601853013039\ 10^{-6} \\ 1.000000611040741 \\ 2.000001018401235 \\ 3.000000763800927 \end{pmatrix}$

(%o125) $4.158471710979939\ 10^{-6}$

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 18

(x1) $1.527601853013039\ 10^{-6}$

(x2) 1.000000611040741

(x3) 2.000001018401235

(x4) 3.000000763800927

(X) $\begin{pmatrix} -3.437104170167515\ 10^{-7} \\ 0.9999994907993824 \\ 1.999999770859722 \\ 2.999999363499228 \end{pmatrix}$

(%o132) $1.87131227002979\ 10^{-6}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(D).A).X+invert(D).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 19

(x1) $-3.437104170167515\ 10^{-7}$

(x2) 0.9999994907993824

(x3) 1.999999770859722

(x4) 2.999999363499228

(X) $\begin{pmatrix} 2.864253474399447\ 10^{-7} \\ 1.000000114570139 \\ 2.000000190950232 \\ 3.000000143212674 \end{pmatrix}$

(%o139) $7.797134458087385\ 10^{-7}$

Uzyskaliśmy zakładaną dokładność w 19tej iteracji. Rozwiązanie jest postaci: x1=0, x2=1, x3=2, x4=3.

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

b) Metoda Gaussa-Seidela

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B i macierz L, która jest dolna trójkątną częścią macierzy A.

```
A:matrix([4,1,0,1],[1,5,1,0],[0,1,6,1],[1,0,1,4]);
B:matrix([4],[7],[16],[14]);
L:matrix([4,0,0,0],[1,5,0,0],[0,1,6,0],[1,0,1,4]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$

(L) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
X:matrix([0],[0],[0],[0]);
```

(X) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 4 przez I.

```
I:ident(4);
```

(I) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje. Posłuży nam do porównania szybkości zbiegania poszczególnych metod.

```
i:0;
```

(i) 0

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 1
(x1) 0
(x2) 0
(x3) 0
(x4) 0

(X) $\begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.2 \\ 2.466666666666666 \\ 2.633333333333333 \end{pmatrix}$

(%o13) 2.633333333333333

Zaczynamy iterowanie, aż do uzyskania zadanej dokładności. Macierz główna jest dominująca przekątniowo (str. 9-10), więc mamy pewność, że ciąg iteracyjny będzie zbieżny.

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 2
(x1) 1.0
(x2) 1.2
(x3) 2.466666666666666
(x4) 2.633333333333333

(X) $\begin{pmatrix} 0.04166666666666663 \\ 0.8983333333333337 \\ 2.078055555555555 \\ 2.970069444444444 \end{pmatrix}$

(%o20) 0.9583333333333334

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 3

(x1) 0.04166666666666663

(x2) 0.8983333333333337

(x3) 2.078055555555555

(x4) 2.970069444444444

(X) $\begin{pmatrix} 0.03289930555555554 \\ 0.977809027777778 \\ 2.008686921296296 \\ 2.989603443287037 \end{pmatrix}$

(%o27) 0.07947569444444436

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 4

(x1) 0.03289930555555554

(x2) 0.977809027777778

(x3) 2.008686921296296

(x4) 2.989603443287037

(X) $\begin{pmatrix} 0.008146882233796227 \\ 0.9966332392939817 \\ 2.002293886236497 \\ 2.997389807882427 \end{pmatrix}$

(%o34) 0.02475242332175931

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 5

(x1) 0.008146882233796227

(x2) 0.996633239293981 7

(x3) 2.002293886236497

(x4) 2.997389807882427

(X) $\begin{pmatrix} 0.001494238205897891 \\ 0.9992423751115214 \\ 2.000561302834342 \\ 2.99948611473994 \end{pmatrix}$

(%o41) 0.006652644027898336

```
→ i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) 0.001494238205897891

(x2) 0.9992423751115214

(x3) 2.000561302834342

(x4) 2.99948611473994

(X) $\begin{pmatrix} 3.178775371346365\ 10^{-4} \\ 0.9998241639257048 \\ 2.000114953555725 \\ 2.999891792226784 \end{pmatrix}$

(%o48) 0.001176360668763254

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) $3.178775371346365\ 10^{-4}$

(x2) 0.9998241639257048

(x3) 2.000114953555725

(x4) 2.999891792226784

(X) $\begin{pmatrix} 7.101096187767109\ 10^{-5} \\ 0.9999628070964796 \\ 2.000024233446122 \\ 2.999976188898 \end{pmatrix}$

(%o55) $2.468665752569654\ 10^{-4}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) $7.101096187767109\ 10^{-5}$

(x2) 0.9999628070964796

(x3) 2.000024233446122

(x4) 2.999976188898

(X) $\begin{pmatrix} 1.525100138022317\ 10^{-5} \\ 0.9999921031104997 \\ 2.00000528466525 \\ 2.999994866083342 \end{pmatrix}$

(%o62) $5.575996049744791\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 9

(x1) $1.525100138022317\ 10^{-5}$

(x2) 0.9999921031104997

(x3) 2.00000528466525

(x4) 2.999994866083342

(X) $\begin{pmatrix} 3.257701539416402\ 10^{-6} \\ 0.9999982915266423 \\ 2.000001140398336 \\ 2.999998900475031 \end{pmatrix}$

(%o69) $1.199329984080677\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 10

(x1) $3.257701539416402\ 10^{-6}$

(x2) 0.9999982915266423

(x3) 2.000001140398336

(x4) 2.999998900475031

(X) $\begin{pmatrix} 7.019995815760183\ 10^{-7} \\ 0.9999996315204167 \\ 2.000000244667425 \\ 2.999999763333248 \end{pmatrix}$

(%o76) $2.555701957840384\ 10^{-6}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(L).A).X+invert(L).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 11

(x1) $7.019995815760183\ 10^{-7}$

(x2) 0.9999996315204167

(x3) 2.000000244667425

(x4) 2.999999763333248

(X) $\begin{pmatrix} 1.512865838160238\ 10^{-7} \\ 0.9999999208091984 \\ 2.000000052642925 \\ 2.999999949017623 \end{pmatrix}$

(%o83) $5.507129977599945\ 10^{-7}$

Uzyskaliśmy zadaną dokładność w 11stej iteracji. Rozwiazanie, po zaokrągleniu do 6 miejsc po przecinku, jest postaci: x1=0, x2=1, x3=2, x4=3.

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

c) Metoda SOR

Zapisuję macierz główną układu A, macierz wyrazów wolnych B i macierz D i L.

```
A:matrix([4,1,0,1],[1,5,1,0],[0,1,6,1],[1,0,1,4]);
B:matrix([4],[7],[16],[14]);
D:matrix([4,0,0,0],[0,5,0,0],[0,0,6,0],[0,0,0,4]);
L:matrix([0,0,0,0],[1,0,0,0],[0,1,0,0],[1,0,1,0]);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(B) $$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(D) $$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(L) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zapisuję rozwiązanie początkowe X:

```
X:matrix([0],[0],[0],[0]);
```

(X) $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Oznaczam macierz jednostkową stopnia 4 przez I.

```
I:ident(4);
```

(I) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tworzę macierz Q dla w=1.05.

```
w:1.05;
Q:(1/w)·D+L;
```

(w) 1.05

(Q)

$$\begin{pmatrix} 3.809523809523809 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4.761904761904762 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5.714285714285714 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3.809523809523809 \end{pmatrix}$$

Zapisuję drugie rozwiązanie i dodaję wiersz z kryterium stopu (str. 13). Wskaźnik i zlicza iteracje.

```
i:0;
```

(i) 0

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 1

(x1) 0

(x2) 0

(x3) 0

(x4) 0

(X)
$$\begin{pmatrix} 1.05 \\ 1.2495 \\ 2.5813375 \\ 2.721773906249999 \end{pmatrix}$$

(%o16) 2.721773906249999

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 2

(x1) 1.05

(x2) 1.2495

(x3) 2.5813375

(x4) 2.721773906249999

(X) $$\begin{pmatrix} -0.04495940039062485 \\ 0.8748855990820312 \\ 2.041517711566895 \\ 3.014814748003729 \end{pmatrix}$$

(%o23) 1.094959400390625

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 3

(x1) −0.04495940039062485

(x2) 0.8748855990820312

(x3) 2.041517711566895

(x4) 3.014814748003729

(X) $$\begin{pmatrix} 0.03120162890951916 \\ 0.9909846585458515 \\ 1.996909218275479 \\ 2.991880165213752 \end{pmatrix}$$

(%o30) 0.1160990594638203

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 4

(x1) 0.03120162890951916

(x2) 0.9909846585458515

(x3) 1.996909218275479

(x4) 2.991880165213752

(X) $\begin{pmatrix} 0.002937902317628138 \\ 1.000482871748155 \\ 2.001491007617893 \\ 2.999243402881238 \end{pmatrix}$

(%o37) 0.02826372659189103

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 5

(x1) 0.002937902317628138

(x2) 1.000482871748155

(x3) 2.001491007617893

(x4) 2.999243402881238

(X) $\begin{pmatrix} -7.504220609710899\ 10^{-5} \\ 0.9996785036761152 \\ 2.000114115971569 \\ 3.000027572992502 \end{pmatrix}$

(%o44) 0.003012944523725247

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 6

(x1) $-7.504220609710899\ 10^{-5}$

(x2) 0.9996785036761152

(x3) 2.000114115971569

(x4) 3.000027572992502

(X) $\begin{pmatrix} 8.090698479290559\ 10^{-5} \\ 0.9999751199953583 \\ 1.999993822928546 \\ 2.999979004748123 \end{pmatrix}$

(%o51) $2.966163192430482\ 10^{-4}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 7

(x1) $8.090698479290559\ 10^{-5}$

(x2) 0.9999751199953583

(x3) 1.999993822928546

(x4) 2.999979004748123

(X) $\begin{pmatrix} 7.996905596385773\ 10^{-6} \\ 1.000000861835062 \\ 2.000003832201515 \\ 2.999997944621977 \end{pmatrix}$

(%o58) $7.291007919651982\ 10^{-5}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 8

(x1) $7.996905596385773\ 10^{-6}$

(x2) 1.000000861835062

(x3) 2.000003832201515

(x4) 2.999997944621977

(X) $\begin{pmatrix} -8.654025251964015\ 10^{-8} \\ 0.9999991703193818 \\ 2.000000313275186 \\ 3.000000043250981 \end{pmatrix}$

(%o65) $8.083445848905413\ 10^{-6}$

```
i:i+1;
x1:X[1,1];x2:X[2,1];x3:X[3,1];x4:X[4,1];
X:(I−invert(Q).A).X+invert(Q).B,numer;
max(abs(x1−X[1,1]),abs(x2−X[2,1]),abs(x3−X[3,1]),abs(x4−X[4,1])),numer;
```

(i) 9

(x1) $-8.654025251964015\ 10^{-8}$

(x2) 0.9999991703193818

(x3) 2.000000313275186

(x4) 3.000000043250981

(X) $\begin{pmatrix} 2.107647925075895\ 10^{-7} \\ 0.9999999314356354 \\ 1.999999988766083 \\ 2.999999945460596 \end{pmatrix}$

(%o72) $7.611162535781091\ 10^{-7}$

Mamy zadaną dokłaność w 9tej iteracji. Rozwiązanie, po zaokrągleniu do 6ciu cyfr po przecinku, jest następujące: x1=0, x2=1, x3=2, x4=3.