Programowanie liniowe

Algorytm transportowy I

- Zagadnienie transportowe
- Sformułowanie zagadnienia
- Metoda kąta N-W
- Metoda minimalnego elementu

ZAGADNIENIE TRANSPORTOWE

Nazwa *zagadnienie transportowe* kojarzy się z transportem. Jako pierwszy sformułował je w 1941 roku F.L. Hitchcock i rzeczywiście dotyczyło ono transportu pewnego produktu.

Później okazało się, że wiele innych zagadnień praktycznych, nie mających nic wspólnego z transportem, można sformułować w ten sposób.

Metoda rozwiązywania tego zagadnienia, zwana *algorytmem transportowym*, została opracowana przez G.B. Dantziga (podobnie zresztą jak metoda sympleks). Metoda ta jest równoważna metodzie sympleks, tzn. daje ten sam ciąg rozwiązań dopuszczalnych, „zmierzających” do rozwiązania optymalnego.

Jednak rachunki sa znacznie prostsze, co pozwala rozwiązywać problemy szybciej niż algorytm sympleks. Daje też możliwość rozwiązywania problemów „większych” rozmiarów.

SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

W zagadnieniu transportowym pewna ilość jednorodnego towaru jest przewożona od m dostawców do n odbiorców, gdzie

a_i - liczba jednostek towaru dostępna u i-tego dostawcy,
b_j - liczba jednostek towaru potrzebna u j-tego odbiorcy,
c_{ij} - koszt transportu jednostki towaru od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy.

Problemem stanowi określenie takiego planu przewozu, który zapewni przewóz całości towaru od dostawców do odbiorców, przy minimalnym sumarycznym koszcie transportu.

Macierz $C = \left[c_{ij}\right]$ nazywamy *macierzą jednostkowych kosztów transportu*, zaś liczby:

$a_1, \ldots, a_m$ - *zasobami dostawców*,
$b_1, \ldots, b_n$ - *zapotrzebowaniem odbiorców*.

Uwaga 1. (TERMINOLOGIA)
Często zasoby dostawców określa się krótko jako *podaż*, natomiast zapotrzebowanie odbiorców jako *popyt*.

Początkowo będziemy zakładać, że całość podaży równoważy całość popytu, tzn. zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Zagadnienie dla którego zachodzi powyższy warunek będziemy nazywać *zagadnieniem zamkniętym* (*zbilansowanym*).

Uwaga 2. W dalszej części pokażemy, że inne przypadki w łatwy sposób można sprowadzić do zagadnienia zamkniętego.

Rozwiązanie zadania transportowego polega na znalezieniu takiego planu przewozów, który minimalizuje łączny koszt transportu i spełnia założenia:

i) łączna ilość towaru wywieziona od każdego dostawcy jest równa jego zasobom,
ii) łączna ilość towaru przywieziona do każdego odbiory jest równa jego zapotrzebowaniu.

Uwaga 3. Równość (1) (tzn. fakt, że zadanie jest zamknięte) jest konieczna, aby obydwa założenia i) oraz ii) mogły być jednocześnie spełnione.

W celu zbudowania modelu matematycznego zagadnienia transportowego, wprowadzamy macierz zmiennych decyzyjnych

$$X = \left[x_{ij}\right]$$

o wymiarach $m \times n$, gdzie x_{ij} oznacza ilość towaru przewiezioną od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Przy takich oznaczeniach zagadnienie transportowe ma postać:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \text{min} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \ldots, m) \quad \text{(warunki dla dostawców)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \ldots, n) \quad \text{(warunki dla odbiorców)} \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{dla każdego } (i, j) \end{cases}$$

Zauważmy, że jest to program liniowy w postaci standardowej. Zatem po sprowadzeniu go do postaci kanonicznej można go rozwiązać metodą sympleks.

Należy jednak podkreślić, że już dla niewielkich wartości m i n może to być duży program, np. $m = 5$ i $n = 10$ otrzymujemy program o 50 zmiennych decyzyjnych i 15 warunkach ograniczających (dla $m = 100$ i $n = 100$ mamy 10000 zmiennych i 200 warunków).

Specjalna struktura tego programu (duża liczba zer w tablicy sympleksowej) umożliwia dostosowanie algorytmu sympleks tak, aby przyśpieszyć rachunki. Zobaczymy to na przykładzie.

Przykład 1. *Przedsiębiorstwo „Społem'' ma w trzech magazynach po 20 ton mąki w każdym. Trzy piekarnie należące do tego przedsiębiorstwa zgłaszają zapotrzebowanie na (odpowiednio) 10, 30 i 20 ton mąki. Koszty transportu jednej tony mąki z i-tego magazynu do j-tej piekarni zawiera macierz*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ustalić plan przewozu mąki z magazynów do piekarni minimalizujący łączne koszty transportu.

Niech x_{ij} oznacza wielkość przewozu z i-tego magazynu do j-tej piekarni. Uwzględniając wszystkie dane, otrzymujemy model matematyczny tego zadania w następującej postaci:

$$\begin{cases} 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + x_{31} + x_{32} + 6x_{33} \to \text{min} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \end{array}\right\} \text{warunki dla dostawców} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20 \end{array}\right\} \text{warunki dla odbiorców} \\ x_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Jest to program liniowy w postaci standardowej, więc można go zapisać w tablicy sympleksowej. Mamy

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	2	4	3	1	5	2	1	1	6
20	1	1	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
30	0	1	0	0	1	0	0	1	0
20	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Zauważmy, że macierz ograniczeń składa się z samych zer i jedynek (przy czym zer jest dużo więcej).

Widzimy, że tablica sympleksowa stowarzyszona z tym, raczej małym problemem, jest duża. Okazuje się jednak, że istnieje zdecydowanie bardziej oszczędny, sposób przedstawienia tego problemu - w postaci tzw. *tablicy transportowej.*

Tablica transportowa dla naszego przykładu jest postaci:

		b_1	b_2	b_3
		10	30	20
a_1	20	2	4	3
a_2	20	1	5	2
a_3	20	1	1	6

Na razie jest to jeszcze tablica niekompletna - pojawią się w niej jeszcze dane dotyczące wielkości przewozów na poszczególnych trasach. Wielkości te będziemy zapisywać jako górne indeksy przy kosztach jednostkowych. Dla uproszczenia zapisu będziemy opuszczać przewozy zerowe (za wyjątkiem przewozów zerowych dla zmiennych bazowych - w przypadku degeneracji).

Proces rozwiązywania zadania transportowego rozpoczynamy od wyznaczenia początkowego rozwiązania dopuszczalnego (i jednocześnie bazowego). Dla zamkniętego zadania transportowego uzyskanie takiego rozwiązania jest zawsze możliwe i nie wymaga zastosowania żadnych specjalnych technik (takich jak technika podproblemów w metodzie sympleks).

Poniżej zaprezentujemy dwie metody wyznaczania początkowego rozwiązania bazowego:
- metodę kąta N-W,
- metodę minimalnego elementu.

METODA KĄTA N-W

Krok 1. Na trasie wyznaczonej przez lewy górny element aktualnej macierzy kosztów (a więc leżący w kącie północno-zachodnim) planujemy tak duży przewóz, jak to tylko możliwe. Planujemy więc na tej trasie przewóz równy całemu zasobowi dostawcy lub całemu zapotrzebowaniu odbiorcy.
Krok 2. Jeżeli zaplanowany przewóz wyczerpuje cały zasób danego dostawcy, to wykreślamy z macierzy kosztów odpowiadający mu wiersz i wracamy do kroku 1.
Jeżeli zaplanowany przewóz zaspokaja całe zapotrzebowanie odbiorcy, to wykreślamy z macierzy kosztów odpowiadającą mu kolumnę i wracamy do kroku 1.
Jeżeli zaplanowany przewóz jednocześnie wyczerpuje cały zasób i-tego dostawcy i zaspokaja całe zapotrzebowanie j-tego odbiorcy, to skreślamy i-ty wiersz i j-tą kolumnę, dodatkowo planujemy zerowy przewóz $x_{i,j+1} = 0$ i wracamy do kroku 1.

Uwaga 4. Powyższą procedurę kontynuujemy do momentu zaplanowania przewozów na wszystkich trasach nieskreślonych.

Uwaga 5. Powyższa procedura po skończonej ilości kroków, prowadzi do uzyskania początkowego rozwiązania dopuszczalnego i jednocześnie bazowego.

Uwaga 6. Wpisanie zerowego przewozu po jednoczesnym skreśleniu wiersza i kolumny, wiąże się z koniecznością zapewnienia odpowiedniej liczby zmiennych bazowych - musi ich być: $m+n-1$, gdzie m to liczba dostawców, zaś n to liczba odbiorów. Rozwiązanie z takim zerowym przewozem nazywa się rozwiązaniem bazowym *zdegenerowanym*.

Zobaczymy teraz na przykładzie jak działa, opisana wyżej metoda N-W. Mamy

I	10	30	20
20	2^{10}	4	3
20	1	5	2
20	1	1	6

II	10	30	20
20	2^{10}	4^{10}	3
20	1	5	2
20	1	1	6

III	10	30	20
20	2^{10}	4^{10}	3
20	1	5^{20}	2^{0}
20	1	1	6

IV	10	30	20
20	2^{10}	4^{10}	3
20	1	5^{20}	2^{0}
20	1	1	6^{20}

Koszt przewozu wynosi: $2\cdot 10+4\cdot 10+5\cdot 20+2\cdot 0+6\cdot 20=280.$

Uwaga 7. Można pokazać (wykonując serię odpowiednich obrotów tablicy sympleksowej tego zadania), że rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą kąta N-W jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym. Co do wartości funkcji celu dla tego rozwiązania, to zazwyczaj jest ona daleka od optymalnej, ponieważ przy konstrukcji tego rozwiązania zupełnie ignorujemy koszty przewozów na wybieranych trasach.

Pokażemy teraz inną metodę konstrukcji początkowego rozwiązania dopuszczalnego (i jednocześnie bazowego), dającą zwykle bliższą optymalnej wartość funkcji celu.

METODA MINIMALNEGO ELEMENTU MACIERZY

Krok 1. Ustalamy najmniejszy element aktualnej macierzy kosztów i na odpowiadającej mu trasie planujemy największy możliwy przewóz. Planujemy więc na tej trasie przewóz równy całemu zasobowi dostawcy lub całemu zapotrzebowaniu odbiorcy.

Krok 2. Jeżeli zaplanowany przewóz wyczerpuje cały zasób danego dostawcy, to wykreślamy z macierzy kosztów odpowiadający mu wiersz i wracamy do kroku 1.

Jeżeli zaplanowany przewóz zaspokaja całe zapotrzebowanie odbiorcy, to wykreślamy z macierzy kosztów odpowiadającą mu kolumnę i wracamy do kroku 1.

Jeżeli zaplanowany przewóz jednocześnie wyczerpuje cały zasób i-tego dostawcy i zaspokaja całe zapotrzebowanie j-tego odbiorcy, to skreślamy i-ty wiersz i j-tą kolumnę, dodatkowo planujemy zerowy przewóz $x_{i,j} = 0$ dla kolejnego najmniejszego elementu w j-tej kolumnie i wracamy do kroku 1.

Zobaczymy teraz na tym samym przykładzie jak działa metoda minimalnego elementu. Mamy

I	10	30	20
20	2	4	3
20	1^{10}	5	2
20	1	1	6

II	10	30	20
20	2	4	3
20	1^{10}	5	2
20	1	1^{20}	6

III	10	30	20
20	2	4	3
20	1^{10}	5	2^{10}
20	1	1^{20}	6

IV	10	30	20
20	2	4	3^{10}
20	1^{10}	5	2^{10}
20	1	1^{20}	6

V	10	30	20
20	2	4^{10}	3^{10}
20	1^{10}	5	2^{10}
20	1	1^{20}	6

Koszt przewozu wynosi: $4 \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 20 = 120$.

Jak widać całkowity koszt przewozu jest teraz niższy, niż koszt uzyskany metodą kąta N-W. Co nie jest zaskakujące, ponieważ tym razem braliśmy pod uwagę koszty transportu na poszczególnych trasach.

Uwaga 8. Można pokazać (wykonując serię odpowiednich obrotów tablicy sympleksowej tego zadania), że rozwiązanie dopuszczalne uzyskane metodą minimalnego elementu jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym.