Programowanie liniowe

Algorytm sympleks II

- Postać optymalna
- Postać nieograniczona
- Postać sprzeczna

POSTAĆ OPTYMALNA TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Rozpoczniemy od powtórnego rozważenia przykładu, rozwiązanego już wcześniej metodą graficzną.

Przykład 1.
Zakład może wytwarzać dwa wyroby P_1 i P_2. Ich produkcja jest limitowana ze względu na ograniczone zasoby trzech surowców: S_1, S_2 i S_3. Posiadane zapasy tych surowców, zyski jednostkowe ze sprzedaży produktów oraz nakłady jednostkowe poszczególnych surowców związane z produkcją podaje poniższa tabela.

	P_1	P_2	Zasoby
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Model matematyczny zagadnienia jest postaci:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \to \max \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 14 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Utworzymy teraz tablicę sympleksową w postaci kanonicznej stowarzyszoną z tym programem liniowym i przekształcimy ją zgodnie z zasadą sympleks.

W tym celu zapisujemy program w postaci standardowej. Mamy

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 \to \min \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Okazuje się, że jest to też postać kanoniczna. Zapisujemy pierwszą tablicę sympleksową. Mamy

$$T_A = \begin{array}{|r|rrrrr|} \hline 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & \underline{2} & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Odczytujemy z tablicy pierwsze bazowe rozwiązanie dopuszczalne, którym jest $x_A = [0, 0, 14, 8, 16]^T$, co na rysunku odpowiada punktowi: $A = (0, 0)$.

Chcemy teraz przekształcić tablicę T_A zgodnie z zasadą sympleks - musimy więc ustalić oś obrotu. W tym celu wybieramy kolumnę, a następnie wiersz obrotu.

Jako kolumnę wybieramy kolumnę x_2, ponieważ $c_2 = -3 < 0$ i jest to najmniejszy współczynnik. Jako wiersz wybieramy wiersz drugi, ponieważ jest to wiersz o najmniejszym ilorazie $\left(\frac{8}{2} = \min\left\{\frac{14}{2}, \frac{8}{2}\right\}\right)$.

Wykonujemy operacje elementarne na wierszach i otrzymujemy

$$T_B \quad = \quad \begin{array}{|r|rrrrr|} \hline 12 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline 6 & 1 & 0 & 1 & \text{-}1 & 0 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & \underline{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Odczytujemy z drugiej tablicy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, którym jest teraz $x_B = [0, 4, 6, 0, 16]^T$, co na rysunku odpowiada punktowi: $B = (0, 4)$.

Wykonujemy jeszcze jeden obrót zgodnie z zasadą sympleks. Osią obrotu będzie teraz element a_{31}, ponieważ kolumna x_1 jest jedyną z ujemnym współczynnikiem funkcji celu ($c_1 = -\frac{1}{2} < 0$), a wierszem o minimalnym ilorazie będzie wiersz 3 $\left(\frac{16}{4} = \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{16}{4}\right\}\right)$.

Wykonujemy operacje elementarne na wierszach tablicy T_B i otrzymujemy

$$T_C \quad = \quad \begin{array}{|r|rrrrr|} \hline 14 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Odczytujemy z trzeciej tablicy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, którym jest teraz $x_C = [4, 2, 2, 0, 0]^T$, co na rysunku odpowiada punktowi: $C = (4, 2)$.

O punkcie C wiemy z rozwiązania graficznego, że jest optymalny. Wnioskujemy zatem, że tablica T_C jest w postaci optymalnej.

Powstaje jednak pytanie: jak rozpoznać, że tablica otrzymana w ciągu kolejnych obrotów jest w postaci optymalnej, tzn. odpowiada rozwiązaniu optymalnemu?

Pozornie naiwna odpowiedź, nasuwająca się po rozwiązaniu ostatniego przykładu, jest prawdziwa - wszystkie współczynniki (wagi) funkcji celu muszą być nieujemne.

Podsumowując

Definicja 1. Mówimy, że tablica sympleksowa w postaci kanonicznej jest w *postaci optymalnej*, jeżeli

$$c_j \geqslant 0 \text{ dla } j = 1, \ldots, n.$$

Uwaga 1. Bazowe rozwiązanie dopuszczalne związane z tą tablicą jest rozwiązaniem optymalnym.

Uwaga 2. Jeżeli tablica sympleksowa nie jest w postaci kanonicznej, to warunek $c_j \geqslant 0$ dla wszystkich j, nie gwarantuje nawet, że rozwiązanie dopuszczalne (!) istnieje.

POSTAĆ NIEOGRANICZONA TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Nie każda tablica sympleksowa w postaci kanonicznej może zostać przekształcona (za pomocą obrotów) do postaci optymalnej. Rozważmy następującą tablicę:

-9	0	0	-2	-1	0
3	0	0	-1	2	1
1	1	0	0	1	0
5	0	1	-4	1	0

Jest ona w postaci kanonicznej, z bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym $\hat{x} = [1, 5, 0, 0, 3]^T$ dla którego $z(\hat{x}) = 9$.

Teraz podobnie jak w początkowym przykładzie, będziemy chcieli przeprowadzić analizę parametryczną zwiększając x_3 tak, aby otrzymać mniejszą wartość funkcji celu. Przyjmujemy więc za zmienne niebazowe: $x_3 = t > 0$ i $x_4 = 0$. Daje to wektor:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5+4t \\ t \\ 0 \\ 3+t \end{bmatrix} \quad \text{i wartość} \quad z\left(x(t)\right) = 9 - 2t.$$

Zauważmy, że wektor $x(t)$ dla każdego $t > 0$ spełnia wszystkie warunki ograniczające oraz brzegowe (!) - a więc jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Ale gdy $t \to \infty$, to $z(x(t)) \to -\infty$, zatem z nie osiąga skończonej wartości minimalnej - rozwiązanie optymalne nie istnieje.

Zauważmy, że powyższe rozumowanie pokazujące, że program liniowy nie ma rozwiązania optymalnego, zależy tylko od koniunkcji dwóch faktów
1) tablica sympleksowa jest w postaci kanonicznej
2) waga $c_3 < 0$ oraz $a_{i3} \leqslant 0$ dla każdego $i = 1, 2, 3$.

Taką argumentację można zastosować do każdej tablicy o tych własnościach, co prowadzi do definicji:
Definicja 2. Tablica sympleksowa w postaci kanonicznej jest w *postaci nieograniczonej*, jeżeli $c_k < 0$ dla pewnego k oraz $a_{ik} \leqslant 0$ dla wszystkich i.

Wniosek 1. *Program liniowy mający tablicę sympleksową w postaci nieograniczonej ma rozwiązania dopuszczalne (jest niesprzeczny), ale nie rozwiązania optymalnego - funkcja celu jest nieograniczona (z dołu) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych.*

DWIE POSTACIE SPRZECZNE TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Przypomnijmy, że jeżeli tablica sympleksowa jest w postaci kanonicznej, to wiadomo, że reprezentuje ona program liniowy niesprzeczny. Istnieje wtedy co najmniej jedno rozwiązanie dopuszczalne - bazowe rozwiązanie dopuszczalne związane z tą tablicą sympleksową.

Jeżeli program liniowy jest sprzeczny (nie ma rozwiązań dopuszczalnych), to choć można go sprowadzić do postaci standardowej (bo każdy można) i zapisać w tablicy sympleksowej, to tej tablicy nie można przekształcić (za pomocą obrotów) do równoważnej postaci kanonicznej - otrzymujemy tablicę w tzw. *postaci sprzecznej*

Przykład 1. Rozważmy następujący program liniowy w postaci standardowej, zapisany w tablicy sympleksowej:

5	2	-3	1	-1
2	$\underline{1}$	0	-1	-1
1	-1	1	2	0
-4	0	1	1	-1

Spróbujemy przekształcić tę tablicę do postaci kanonicznej, tzn. spróbujemy uzyskać macierz jednostkową. W tym celu wykonamy serię obrotów, wokół zaznaczonych elementów.

1	0	-3	3	1
2	1	0	-1	-1
3	0	$\underline{1}$	1	-1
-4	0	1	1	-1

10	0	0	6	-2
2	1	0	-1	-1
3	0	1	1	-1
-7	0	0	0	0

Ostatnia tablica pokazuje, że program jest sprzeczny, ponieważ *żaden* wektor (a dokładniej - jego współrzęde) nie spełnia ostatniego równania, tzn. $-7 = 0$.

Definicja 3. Mówimy, że tablica sympleksowa jest w postaci sprzecznej pierwszego rodzaju, jeżeli

$$b_i \neq 0 \text{ dla pewnego } i \text{ oraz } a_{ij} = 0 \text{ dla każdego } j.$$

Uwaga 3. Program liniowy zapisany w takiej tablicy jest sprzeczny (nie ma rozwiązań dopuszczalnych).

Uwaga 4. Sprzeczność I rodzaju oznacza, że układ równań $Ax = b$ nie ma rozwiązań.

Uwaga 5. Jeśli układ równań $Ax = b$ ma rozwiązania, to przekształcając go równoważnie, nigdy nie otrzymamy tego typu równania (np. $-7 = 0$). Co jest równoznaczne z tym, że w tablicy sympleksowej nie pojawi się wiersz typu:

-7	0	0	0	0

Uwaga 6. Nawet jeśli układ $Ax = b$ posiada rozwiązania, to może się okazać, że żadne z nich nie spełnia warunków brzegowych, tzn. $x \geqslant 0$.

Przykład 2. Rozważmy następujący program liniowy w postaci standardowej, zapisany w tablicy sympleksowej:

-6	-1	1	-1	0
8	2	-2	-6	0
-2	0	5	4	1

Ostatnie ograniczenie (równanie) ma postać:

$$-2 = 5x_2 + 4x_3 + x_4.$$

Jest oczywiste, że żaden wektor $x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ o współrzędnych nieujemnych, nie może spełniać tego równania. Oznacza to, że rozpatrywany program jet sprzeczny.

Definicja 4. Mówimy, że tablica sympleksowa jest w postaci sprzecznej drugiego rodzaju, jeżeli

$$b_i < 0 \text{ dla pewnego } i \text{ oraz } a_{ij} \geqslant 0 \text{ dla każdego } j$$

lub równoważnie

$$b_i > 0 \text{ dla pewnego } i \text{ oraz } a_{ij} \leqslant 0 \text{ dla każdego } j.$$

Uwaga 7. Program liniowy zapisany w takiej tablicy jest sprzeczny (nie ma rozwiązań dopuszczalnych).