Programowanie liniowe

Algorytm sympleks I

- Tablica sympleksowa
- Obracanie tablicy sympleksowej
- Postać kanoniczna
- Szukanie lepszego rozwiązania dopuszczalnego
- Zasada sympleks

TABLICA SYMPLEKSOWA

Tablicą sympleksową stowarzyszoną z programem liniowym w postaci standardowej, tzn.

$$\begin{cases} z = c^T x + d \to \text{min} \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

nazywamy tabelę zawierającą dane definiujące ten program postaci:

$-d$	c^T
b	A

Przykład 1.
Podać tablicę sympleksową stowarzyszoną z programem liniowym:

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 \to \max \\ x_1 + x_2 + 3x_4 \leqslant 50 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \leqslant 80 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Sprowadzamy program do postaci standardowej, mamy

$$\begin{cases} -6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 7x_4 \to \min \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + x_5 = 50 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6 = 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_7 = 80 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 0, \ldots, 7. \end{cases}$$

Dla tego programu macierze A, b i c są postaci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 50 \\ 150 \\ 80 \end{bmatrix},$$

$$c^T = \begin{bmatrix} -6 & -5 & -3 & -7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

co daje następującą tablicę sympleksową T_1:

$$T_1 = \begin{array}{|r|rrrrrrr|} \hline 0 & -6 & -5 & -3 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 50 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 150 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 80 & 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Uwaga 1. W dostępnej literaturze (np. w zbiorze zadań pod redakcją K.Kukuły) występują inne, często bardziej skomplikowane, formy tablicy sympleksowej.

Uwaga 2. Bardzo ważną kwestią jest, aby zdawać sobie sprawę z tego, że programy liniowe w postaci standardowej, mogą być reprezentowane przez wiele różnych, ale równoważnych, tablic sympleksowych.

Dla zobrazowania uwagi 2, dla danej tablicy T_1 wyeliminujmy zmienną x_1 z drugiego i trzeciego ograniczenia. W tym celu wyliczymy x_1 z pierwszego ograniczenia i podstawimy do drugiego i trzeciego. Mamy

$$x_1 = 50 - x_2 - 3x_4 - x_5.$$

Po podstawieniu do drugiego ograniczenia dostajemy:

$$150 = 2(50 - x_2 - 3x_4 - x_5) + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_6,$$

a stąd

$$50 = -x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 + x_6.$$

Zauważmy, że to samo równanie możemy otrzymać po prostu mnożąc pierwsze ograniczenie przez -2 i dodając do drugiego, co jest równoważne z pomnożeniem w tablicy T_1 wiersza pierwszego ograniczenia przez -2 i dodaniem go do wiersza drugiego ograniczenia.

Podobnie po podstawieniu do trzeciego ograniczenia otrzymujemy:

$$80 = 50 - x_2 - 3x_4 - x_5 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_7,$$

a stąd ostatecznie:

$$30 = x_3 + x_4 - x_5 + x_7.$$

Alternatywnie to samo równanie możemy otrzymać przez pomnożenie pierwszego ograniczenia przez -1 i dodanie go trzeciego, co jest równoważne z pomnożeniem w tablicy T_1 wiersza pierwszego ograniczenia przez -1 i dodaniem go do wiersza trzeciego ograniczenia.

W wyniku tych przekształceń otrzymujemy następującą tablicę sympleksową:

0	-6	-5	-3	-7	0	0	0
50	1	1	0	3	1	0	0
50	0	-1	2	-5	-2	1	0
30	0	0	1	1	-1	0	1

Ta nowa tablica reprezentuje w sposób równoważny ten sam program liniowy. Dwa ograniczenia mają nieco inną, ale równoważną postać.

Funkcja celu, reprezentowana w tej tablicy, jest postaci:

$$z(x) = -6x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 7x_4.$$

Przypuśćmy, że chcemy wyeliminować zmienną x_1 również z funkcji celu (wkrótce zobaczymy, że taka eliminacja jest konieczna w metodzie sympleks). Podstawiamy wyliczone wcześniej x_1 do funkcji celu i otrzymujemy:

$$z(x) = -6(50 - x_2 - 3x_4 - x_5) - 5x_2 - 3x_3 - 7x_4,$$

a stąd

$$z(x) = -300 + x_2 - 3x_3 + 11x_4 + 6x_5.$$

To samo równanie możemy otrzymać w tablicy mnożąc wiersz pierwszego ograniczenia przez 6 i dodając do wiersza funkcji celu. Ostatecznie otrzymujemy tablicę:

$$T_2 \quad = \quad \begin{array}{|r|rrrrrrr|} \hline 300 & 0 & 1 & -3 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ \hline 50 & 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -1 & 2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Zauważmy, że tablica T_2 reprezentuje ten sam program liniowy co tablica T_1. Dla przykładu wektor $x^0 = [50, 0, 0, 0, 0, 50, 30]^T$ spełnia ograniczenia reprezentowany w tablicy T_2 i $z(x^0) = -300$. Łatwo sprawdzić, że wektor x^0 spełnia również ograniczenia reprezentowane przez tablicę T_1 i podstawienie x^0 do funkcji celu z tablicy T_1 daje $z(x^0) = -300$.

OBRACANIE TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Ciąg przekształceń elementarnych wykonanych na tablicy T_1 w celu otrzymania tablicy T_2 nazywamy *obrotem* tablicy sympleksowej. Zasady wykonywania obrotu tablicy sympleksowej możemy wypunktować następująco:

1) Wybrać niezerowy element a_{hk} w h-tym wierszu i k-tej kolumnie macierzy ograniczeń A - jest to tzw. *element centralny* tego przekształcenia (inaczej *oś obrotu*). Wiersz h będziemy nazywać *wierszem obrotu*, a kolumnę k - *kolumną obrotu*.

2) Pomnożyć wiersz obrotu (tj. wszystkie jego elementy) przez stałą $\frac{1}{a_{hk}}$ tak, aby otrzymać 1 na osi obrotu.

3) Następnie wykonując operacje elementarne na wierszach (tj. mnożenie wiersza obrotu przez stałą i dodawanie go do innego wiesza), wyzerować wszystkie pozostałe elementy w kolumnie obrotu (łącznie ze współczynnikiem funkcji celu).

POSTAĆ KANONICZNA PROGRAMU LINIOWEGO I TABLICY SYMPLEKSOWEJ

Rozważmy następujący przykład.

Przykład 2.
Niech dany będzie program liniowy w postaci standardowej

$$\begin{cases} -2x_2 + 7x_3 + 8 \to \min \\ 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \\ -2x_2 + x_3 + x_5 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0, \end{cases}$$

wtedy stowarzyszona z nim tablica sympleksowa jest postaci:

-8	0	-2	7	0	0
4	0	2	-4	1	0
6	1	1	5	0	0
5	0	-2	1	0	1

Zauważmy, że dla takiej formy tablicy sympleksowej, jesteśmy w stanie bardzo łatwo podać jakieś rozwiązanie dopuszczalne. Rzeczywiście przyjmując $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$ z warunków ograniczających wynika, że $x_4 = 4$, $x_1 = 6$ i $x_5 = 5$.

Mamy zatem

$$x^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad z(x^0) = 8 - 2x_2 + 7x_3 = 8.$$

Wektor x^0 jest dopuszczalny, ponieważ ma nieujemne współrzędne i spełnia wszystkie warunki ograniczające, co wynika z jego konstrukcji.

POSTAĆ KANONICZNA

Tą specjalną postać powyższej tablicy sympleksowej (jak i programu liniowego), która pozwala w łatwy sposób podawać rozwiązanie dopuszczalne, nazywamy *postacią kanoniczną*. Rozważmy na nowo program liniowy w postaci standardowej

$$\begin{cases} z = c^T x + d \to \min \\ Ax = b \\ x \geqslant 0, \end{cases}$$

oraz reprezentującą go tablicę sympleksową:

$-d$	c^T
b	A

Definicja 1. O programie liniowym w postaci standardowej (i o jego tablicy sympleksowej) będziemy mówili, że jest w postaci *kanonicznej*, jeżeli:

i) wszystkie wyrazy wolne sa nieujemne, tzn. $b_i \geqslant 0$, gdzie $i = 1, \ldots, m$,

ii) macierz A zawiera m kolumn jednostkowych tworzących macierz jednostkową wymiaru $m \times m$,

iii) współczynniki funkcji celu odpowiadające tym kolumnom jednostkowym są równe zero.

Tablica sympleksowa (jak i program liniowy) z przykładu 2 jest w postaci kanonicznej, ponieważ

i) b_1, b_2, b_3 są nieujemne,

ii) kolumny czwarta, pierwsza i piąta macierzy A tworzą macierz jednostkową

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iii) odpowiednie współczynniki funkcji celu tzn. c_4, c_1 i c_5 są równe zero.

Dla programu w postaci kanonicznej przyjmuje się następujące definicje.

Definicja 2. Zmienne decyzyjne odpowiadające kolumnom tworzącym macierz jednostkową w macierzy ograniczeń A, nazywamy *zmiennymi bazowymi*, zaś pozostałe zmienne - *zmiennymi niebazowymi*.

Uwaga 3. W tablicy sympleksowej z przykładu 2, zmiennymi bazowymi są: x_1, x_4 i x_5 (tworzą one tzw. *bazę*), zaś zmiennymi niebazowymi są: x_2 i x_3.

Uwaga 4. W związku z pojawieniem się tutaj pojęcia bazy, postać kanoniczna bywa nazywana *postacią bazową*. Ma to miejsce często w literaturze polskiej.

Definicja 3. Rozwiązanie dopuszczalne otrzymane na skutek podstawienia za zmienne niebazowe zera, a następnie użycia warunków ograniczających do wyznaczenia zmiennych bazowych, nazywamy *bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym* związanym z daną tablicą (programem) w postaci kanonicznej.

Podsumowując to co już zostało powiedziane: tablica sympleksowa z przykładu 2 jest w postaci kanonicznej z bazowymi zmiennymi: x_4, x_1 i x_5 i niebazowymi zmiennymi: x_2 i x_3, a wektor

$$x^0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym związanym z tą tablicą.

W przykładzie 2, indeksy zmiennych bazowych to: 1, 4 i 5. W pewnych sytuacjach wygodnie jest uporządkować te indeksy, co prowadzi do następującego pojęcia:

Definicja 4. *Ciągiem bazowym* indeksów związanym z tablicą sympleksową w postaci kanonicznej, nazywamy ciąg indeksów zmiennych bazowych, uporządkowanych według zasady: i-ty indeks w ciągu jest indeksem zmiennej bazowej odpowiadającej i-tej kolumnie jednostkowej w macierzy ograniczeń A.

W naszym przykładzie ciągiem bazowym indeksów jest:

$$S = (4, 1, 5).$$

Uwaga 5. Pewne tablice w postaci standardowej - te związane ze sprzecznymi programami liniowymi - nie mogą zostać przekształcone do postaci kanonicznej. Wkrótce pokażemy jak za pomocą ciągu obrotów otrzymać z tablicy w postaci standardowej albo postać kanoniczną albo jedną z dwóch postaci sprzecznych.

Uwaga 6. Program liniowy w postaci kanonicznej jest niesprzeczny, ponieważ zawsze posiada co najmniej jedno rozwiązanie dopuszczalne - mianowicie bazowe rozwiązanie dopuszczalne związane z tą właśnie postacią kanoniczną.

SZUKANIE LEPSZEGO ROZWIĄZANIA

Dla programu liniowego z przykładu 2, znaleźliśmy bazowe rozwiązanie dopuszczalne x^0 dające wartość funkcji celu: $z(x^0) = 8$. Naszym celem (tzn. celem optymalizacji) jest zmniejszenie tej wartości, tzn. znalezienie innego bazowego rozwiązania dopuszczalnego dającego mniejszą wartość

Funkcja celu dana jest wzorem:

$$z(x) = 8 - 2x_2 + 7x_3 \quad \text{dla} \quad x \in [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T .$$

Przy zmiennej niebazowej x_2 występuje ujemny współczynnik, więc wydaje się, że podstawiając za x_2 jakąś dodatnią wartość, zamiast zera, jak to miało miejsce w x^0, otrzymamy nowe rozwiązanie dopuszczalne dające mniejszą wartość funkcji celu.

Przyjmujemy więc za zmienne niebazowe:

$$x_2 = t > 0, \qquad x_3 = 0.$$

Podstawiając te wartości do warunków ograniczających naszego programu, możemy wyliczyć, że

$$x_1 = 6 - t, \qquad x_4 = 4 - 2t, \qquad x_5 = 5 + 2t.$$

Daje to wektor:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 6 - t \\ t \\ 0 \\ 4 - 2t \\ 5 + 2t \end{bmatrix} \quad \text{i wartość} \quad z\left(x(t)\right) = 8 - 2t.$$

Chcemy przyjąć t możliwie największe, aby uzyskać jak największe zmniejszenie wartości funkcji celu.

Na podstawie swojej konstrukcji $x(t)$ spełnia wszystkie warunki ograniczające, więc jest rozwiązaniem dopuszczalnym o ile pozostanie nieujemne. A to będzie miało miejsce pod warunkiem, że

$$6 - t \geqslant 0, \qquad 4 - 2t \geqslant 0, \qquad 5 + 2t \geqslant 0.$$

Rozwiązując te nierówności otrzymujemy:

$$t \leqslant 6, \qquad t \leqslant 2, \qquad t \geqslant -\frac{5}{2},$$

zatem największa dopuszczalna wartość t (a tym samym x_2), to $t = 2$.

Daje to nowy wektor dopuszczalny:

$$\widehat{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \quad \text{i wartość} \quad z\left(\widehat{x}\right) = 4.$$

Powstaje pytanie: „Czy $\widehat{x}$ jest bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym, związanym z jakąś tablicą sympleksową w postaci kanonicznej naszego programu liniowego?''

Okazuje się, że tak! Żeby się o tym przekonać należy dokonać odpowiedniego obrotu wyjściowej tablicy sympleksowej. W efekcie tego obrotu zmienna x_2 powinna stać się zmienną bazową, a odpowiadająca jej wartość w kolumnie wyrazów wolnych powinna wynosić 2.

Obrotem spełniającym nasze oczekiwania będzie obrót wyjściowej tablicy sympleksowej wokół podkreślonego elementu:

-8	0	-2	7	0	0
4	0	$\underline{2}$	-4	1	0
6	1	1	5	0	0
5	0	-2	1	0	1

Po wykonaniu obrotu otrzymujemy tablicę:

-4	0	0	3	1	0
2	0	1	-2	$\frac{1}{2}$	0
4	1	0	7	$-\frac{1}{2}$	0
9	0	0	-3	1	1

Powyższa tablica jest w postaci kanonicznej, z ciągiem bazowym $(2, 1, 5)$ i bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym $\hat{x}$.

Pokazaliśmy, że wykonana wyżej analiza parametryczna, gdzie przyjęliśmy $x_2 = t$ w celu wyznaczenia wektora $\widehat{x}$, może zostać zastąpiona obrotem tablicy sympleksowej wokół odpowiednio dobranej osi obrotu (odpowiedniego elementu).

Przyjrzyjmy się procesowi wyboru osi obrotu. Na początku dla $t > 0$ mieliśmy

$$x(t) = \begin{bmatrix} 6-t \\ t \\ 0 \\ 4-2t \\ 5+2t \end{bmatrix} \geqslant 0 \iff t \leqslant \min\left\{\frac{6}{1}, \frac{4}{2}\right\}.$$

Wyznaczając powyższe minimum, trzeciej nierówności, tzn. $5+2t \geqslant 0$ nie bierzemy tu pod uwagę, gdyż była zawsze spełniona dla każdego $t > 0$.

Zauważmy, że to górne ograniczenie na t możemy również wyznaczyć analizując wyłącznie tablicę sympleksową, jako minimum ilorazów postaci:

$$\frac{b_i}{a_{ik}}$$

dla tych wierszy i w których jest $a_{ik} > 0$ i w kolumnie k w której współczynnik funkcji celu $c_k < 0$.

Definicja 5. Dla ustalonej kolumny obrotu k danej tablicy sympleksowej wiersz h taki, że iloraz

$$\frac{b_h}{a_{hk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}} : \text{ dla wierszy } i, \text{ w których } a_{ik} > 0\right\}$$

nazywamy *wierszem o minimalnym ilorazie* związanym z kolumną k.

Podsumowując, wiersz obrotu jaki wybieramy, aby otrzymać nową tablicę sympleksową, jest dokładnie wierszem o minimalnym ilorazie.

Uwaga 7. Może być więcej niż jeden taki wiersz. Może również nie być żadnego, jeśli $a_{ik} \leqslant 0$ dla każdego i, tzn. wszystkie wyrazy a_{ik} w tej kolumnie są niedodatnie.

ZASADA SYMPLEKS WYBORU OSI OBROTU

Zasadą sympleks nazywamy sposób wyboru elementu tablicy sympleksowej, tzw. osi obrotu, względem którego dokonamy przekształcenia tej tablicy. Mając wybraną kolumnę obrotu k i wybrany wiersz obrotu h, możemy ustalić oś obrotu jako a_{hk}.

Dokonując obrotu tablicy sympleksowej w postaci kanonicznej względem tak wybranej osi obrotu, otrzymamy nowa tablicę w postaci kanonicznej, z bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym, dla której wartość funkcji celu będzie mniejsza (bądź równa, gdy $b_h = 0$) od poprzedniej wartości.

Uwaga 8. Zastosowanie zasady sympleks pozwala rozwiązać większość programów liniowych w postaci kanonicznej.

Uwaga 9. Nawet jeśli $c_k \geqslant 0$, to dokonując obrotu tablicy w postaci kanonicznej względem kolumny k i wiersza o minimalnym ilorazie związanego z kolumna k, otrzymamy tablicę w postaci kanonicznej. Ma to miejsce z uwagi na fakt, że taki obrót zachowuje $b_i \geqslant 0$ dla każdego i.