

Pochodne funkcji

Wykład nr 10 (Inżynieria sanitarna)

- Podstawowe pojęcia
- Twierdzenia o pochodnej funkcji
- Różniczka funkcji

Definicja 1. (*przyrost zmiennej i przyrost funkcji*)

Różnicę

$$x - x_0 =: \Delta x$$

nazywamy przyrostem zmiennej rzeczywistej x , a odpowiadający przyrostowi Δx przyrost

$$\Delta f = f(x) - f(x_0)$$

nazywamy przyrostem funkcji f .

Definicja 2. (*iloraz różnicowy*)

Iloraz przyrostów

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f .

Definicja 3. (*pochodna funkcji w punkcie*)

Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego przy $x \rightarrow x_0$, tzn.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jeżeli granica taka nie istnieje, to funkcja w tym punkcie nie ma pochodnej. Pochodną funkcji $y = f(x)$ oznaczamy:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \dot{y}$$

Pierwsze dwa symbole wprowadził Lagrange, trzeci i czwarty symbol - Leibniz†, ostatni stosowany w mechanice - Newton‡.*

*Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) - matematyk francuski.

†Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) - filozof i matematyk niemiecki

‡Isaac Newton (1642-1727) - fizyk, astronom i matematyk angielski

Uwaga 1. Pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta α , który tworzy styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 z dodatnią częścią osi OX .

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna pochodnej.*

Uwaga 2. Odnajdywanie pochodnej funkcji nazywa się *różniczkowaniem funkcji*. Dział matematyki traktujący o pochodnych, ich własnościach i zastosowaniach nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

Definicja 4. (*funkcja różniczkowalna w punkcie*)

Funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0 , jeżeli istnieje pochodna funkcji $f'(x_0)$ w punkcie x_0 .

Definicja 5. (*funkcja różniczkowalna na zbiorze*)

Funkcję, która jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru nazywamy funkcją różniczkowalną na tym zbiorze.

Ćwiczenie 1. Wyznacz pochodne podanych funkcji:

a) $y = x;$

b) $y = x^2;$

c) $y = x^3;$

d) $y = \sin x;$

e) $y = e^x.$

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0, a \in \mathbb{R}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0$
6. $(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0$

$$7. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$8. (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad 0 \leq \arccos x \leq \pi$$

$$9. (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \arctg x < \frac{\pi}{2}$$

$$10. (\text{arcctg } x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad 0 < \text{arcctg } x < \pi$$

$$11. (e^x)' = e^x$$

$$12. (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0$$

$$13. (\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

$$14. (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, a \neq 1, x \neq 0$$

W szpitalu psychiatrycznym wybucha zamieszanie. Wszyscy pacjenci gdzieś uciekają, tylko jeden chory siedzi spokojnie na ławce.

Podbiega do niego kolega i krzyczy:

- Uciekaj! Przyjechali lekarze i wszystkich różniczkują!

Na co ten spokojnie odpowiada:

- Nie boję się. Jestem e^x .

Twierdzenie 1. (o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu)

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x , to

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$;

2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, o ile $g(x) \neq 0$.

Ćwiczenie 2. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$a) f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x^2 - \frac{2}{x} + \sqrt{x};$$

$$b) g(x) = x^2 \ln x;$$

$$c) h(x) = \frac{e^x}{\sin x};$$

$$d) s(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Twierdzenie 2. (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli

- 1. funkcja f ma pochodną w punkcie x ,*
 - 2. funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x)$,*
- to*

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ćwiczenie 3. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = \cos^3 x;$

b) $g(x) = (3x^2 + 2x - 10)^4;$

c) $h(x) = e^{\sin^2 x};$

d) $s(x) = \frac{1}{\cos^3 \sqrt{x^3 - 1}}.$

Ćwiczenie 4. Obliczyć pochodne podanych funkcji:

a) $f(x) = x^{x^2};$

b) $g(x) = x^{\sin x}.$

Ćwiczenie 5. Ropa z uszkodzonego tankowca wycieka ze stałą prędkością $V = 10 \frac{m^3}{min}$ i tworzy plamę kołową o grubości $d = 2mm$. Obliczyć, z jaką prędkością będzie powiększała się średnica plamy ropy w chwili, gdy będzie miała średnicę $D = 1000m$.

Ćwiczenie 6. Do czaszy w kształcie półkuli o promieniu $R = 20cm$ wlewa się jednostajnie woda z prędkością $V = 100 \frac{cm^3}{sek}$. Obliczyć prędkość, z jaką będzie podnosił się poziom wody h w czaszy na początku i pod koniec napełniania. (Przypomnijmy, że objętość odcinka kuli wyraża się wzorem: $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$)

Twierdzenie 3. (równanie stycznej do wykresu funkcji)
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest postaci:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ćwiczenie 7. *Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:*

a) $f(x) = e^x, (0, 1);$

b) $g(x) = \sin x, (\pi, 0).$

Ćwiczenie 8. *Dane są punkty $A = (2, -1)$ oraz $B = (4, 3)$. Na wykresie funkcji $y = x^2 + 1$ znaleźć punkt C taki, aby pole trójkąta ABC było najmniejsze.*

Ćwiczenie 9. *Na krzywej będącej wykresem funkcji $y = \frac{1}{x+1}$ znaleźć punkt mający własność, że odcinek stycznej poprowadzonej w tym punkcie tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu $S = 2$.*

Definicja 6. (*różniczka funkcji*)

Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem:

$$df(\Delta x) := f'(x_0)\Delta x.$$

Rysunek 2. *Różniczka funkcji.*

Twierdzenie 4. (zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych)
Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 , to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji f

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej x , tzn.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0.$$

Ćwiczenie 10. Obliczyć przybliżone wartości funkcji:

a) $\sqrt[4]{15.96}$

b) $\arctan 1.05$

c) $e^{-0.001}$

d) $\ln 1.004$.

Ćwiczenie 11. Sześcienne kostka lodu ma objętość $V = 8\text{cm}^3$. Obliczyć w przybliżeniu, o ile zmniejszyła się krawędź kostki, jeżeli stopiło się 0.3cm^3 lodu.

Ćwiczenie 12. Koła ma średnicę równą 2m . Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole koła, jeżeli jego średnica wzrośnie o 3cm .

Twierdzenie 5. (zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędu pomiaru)

Niech wielkości fizyczne x i y będą związane zależnością $y = f(x)$. Załóżmy, że istnieje pochodna $f'(x_0)$, gdzie x_0 jest wynikiem pomiaru wielkości x . Ponadto niech Δ_x oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości x . Wtedy błąd bezwzględny Δ_y obliczanej wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym:

$$\Delta_y \approx |f'(x_0)| \Delta_x.$$

Ćwiczenie 13. *Krawędź sześcianu, zmierzona z dokładnością $\pm 1\text{mm}$, ma długość 65mm . Z jaką dokładnością można obliczyć pole powierzchni tego sześcianu?*

Ćwiczenie 14. *Czas w biegu na 100m mierzy się z dokładnością 0.01sek . Zawodnik uzyskał czas 10.00sek . Z jaką dokładnością można obliczyć średnią prędkość tego zawodnika?*

Definicja 7. (*pochodne wyższych rzędów*)

Drugą pochodną funkcji $y = f(x)$ nazywamy pochodną pierwszej pochodnej, tzn.

$$f''(x) = (f'(x))',$$

podobnie trzecią pochodną funkcji $y = f(x)$ nazywamy pochodną drugiej pochodnej, itd.

$$f'''(x) = (f''(x))',$$

$$f^{(4)}(x) = (f'''(x))',$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Pochodne wyższych rzędów funkcji $y = f(x)$ oznaczamy również symbolami: $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$, \ddot{y} ; $\frac{d^3 f(x)}{dx^3}$, $\ddot{\ddot{y}}$, itd.

Ćwiczenie 15. Obliczyć pochodne f' , f'' , f''' podanych funkcji:

a) $f(x) = e^{x^2}$;

b) $g(x) = x \ln x$;

c) $h(x) = \sin^3 x$.