Badanie funkcji

Wykład

- Ekstrema funkcji
- Funkcje wypukłe i wklęsłe
- Punkty przegięcia wykresu

Definicja 1. (*minimum lokalne*)
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ minimum lokalne, jeżeli

$$\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}\ f(x) > f(x_0).$$

Definicja 2. (*maksimum lokalne*)
Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$ maksimum lokalne, jeżeli

$$\exists_{\delta>0}\forall_{x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)}\ f(x) < f(x_0).$$

Rysunek 1. *Minimum i maksimum lokalne.*

Twierdzenie 1. *(*Fermata[*], warunek konieczny istnienia ekstremum*)*
Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma ekstremum lokalne w punkcie x_0, to

$$f'(x_0) = 0.$$

Uwaga 1. Implikacja odwrotna jest fałszywa. Świadczy o tym przykład funkcji $f(x) = x^3$, która spełnia w punkcie $x_0 = 0$ warunek $f'(x_0) = 0$, ale nie ma tam ekstremum lokalnego.

[*] Pierre de Fermat (1601-1665) - matematyk francuski.

Twierdzenie 2. *(*I warunek wystarczający istnienia ekstremum*)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:
1. $f'(x_0) = 0$*;*
2. pochodna $f'(x)$ *przy przejściu zmiennej* x *przez punkt* x_0*, zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to funkcja* f *osiąga minimum (maksimum) lokalne w punkcie* x_0*.*

Rysunek 2. *Minimum i maksimum lokalne.*

Ćwiczenie 1. *Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:*

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$;

b) $g(x) = e^x + e^{-x}$;

c) $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

Twierdzenie 3. *(*II warunek wystarczający istnienia ekstremum*)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:
1. $f'(x_0) = 0$;
2. $f''(x_0) > 0 \quad (f''(x_0) < 0)$,
to funkcja f ma w punkcie x_0 minimum (maksimum) lokalne.

Ćwiczenie 2. *Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:*
a) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;
b) $g(x) = (x-5)e^x$.

Definicja 3. (*minimum i maksimum globalne*)
Mówimy, że funkcja f określona na zbiorze $A \subset D_f$ osiąga w punkcie x_0 minimum (maksimum) globalne, jeżeli osiąga w tym punkcie wartość najmniejszą (największą) spośród wszystkich swoich wartości.

Rysunek 3. *Ekstrema globalne funkcji.*

Ćwiczenie 3. *Znaleźć ekstrema globalne funkcji na podanych przedziałach:*

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2, \quad [-1, 2]$;

b) $g(x) = x^3 \ln x^3, \quad [\frac{1}{e}, 2]$;

c) $h(x) = 2\sin x + \cos 2x, \quad [0, 2\pi]$.

Ćwiczenie 4. *Tekst w książce zajmuje na każdej stronie powierzchnię 200 cm^2, marginesy z lewej i z prawej strony są równe 1 cm, a marginesy z dołu i góry są równe 2 cm. Zaprojektować wymiary kartek w tej książce tak, aby zużyć jak najmniej papieru.*

Ćwiczenie 5. *W półkole o promieniu R wpisać prostokąt o największym polu. Podstawa prostokąta ma leżeć na średnicy półkola.*

Ćwiczenie 6. *Znaleźć wymiary puszki do konserw w kształcie walca o objętości $V = 250\pi\ cm^3$, do sporządzenia której zużyje się najmniej blachy.*

Ćwiczenie 7. *Pies i jego właściciel stoją po przeciwległych stronach okrągłego basenu o promieniu $R = 10\ m$. Pies biega z prędkością $v_b = 5\ \frac{m}{s}$ i pływa z prędkością $v_p = 1\ \frac{m}{s}$. Jak powinien poruszać się pies, aby najszybciej dotrzeć do właściciela? (Przypomnijmy, że długość cięciwy dla kąta środkowego α wyraża się wzorem: $d = 2R \sin \frac{1}{2}\alpha$, natomiast długość łuku dla kąta środkowego β jest postaci: $l = \beta R$.)*

Definicja 4. (*funkcja wypukła*)
Funkcja jest wypukła na przedziale (a, b), jeżeli

$$\forall_{a<x_1<x_2<b} \forall_{0<\lambda<1} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Uwaga 2. Wypukłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży wyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Rysunek 4. *Funkcja wypukła.*

Definicja 5. (*funkcja wklęsła*)
Funkcja jest wklęsła na przedziale (a, b), jeżeli

$$\forall_{a<x_1<x_2<b} \forall_{0<\lambda<1} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Uwaga 3. Wklęsłość oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży niżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna.

Rysunek 5. *Funkcja wklęsła.*

Twierdzenie 4. *(*warunek wystarczający wypukłości i wklęsłości*)*
1. Jeżeli $f''(x) > 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$*, to funkcja* f *jest wypukła na* (a,b)*.*
2. Jeżeli $f''(x) < 0$ *dla każdego* $x \in (a,b)$*, to funkcja* f *jest wklęsła na* (a,b)*.*

Ćwiczenie 8. *Określić przedziały wypukłości i wklęsłości podanych funkcji:*

a) $f(x) = e^{-x}$;

b) $g(x) = x^4$;

c) $h(x) = \sin x$;

d) $s(x) = \arctan x$.

Definicja 6. (*punkt przegięcia wykresu funkcji*)
Niech funkcja f będzie różniczkowalna w punkcie x_0. Punkt $(x_0, f(x_0))$ nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji f, jeżeli istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że funkcja f jest wypukła na $(x_0 - \delta, x_0)$ i wklęsła na $(x_0, x_0 + \delta)$ lub odwrotnie.

Uwaga 4. Punkt wykresu jest punktem przegięcia, jeżeli funkcja ma w tym punkcie styczną i zmienia w nim rodzaj wypukłości. Wykres funkcji przechodzi wtedy z jednej strony stycznej na drugą.

Rysunek 6. *Punkt przegięcia funkcji.*

Twierdzenie 5. *(*warunek konieczny istnienia punktu przegięcia*)*
Jeżeli funkcja różniczkowalna f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia, to

$$f''(x_0) = 0.$$

Twierdzenie 6. *(*warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia*)*
Jeżeli funkcja f spełnia warunki:
1. $f''(x_0) = 0$;
2. pochodna $f''(x)$ przy przejściu zmiennej x przez punkt x_0, zmienia znak z ujemnego na dodatni (z dodatniego na ujemny), to wykres funkcji f ma punkt przegięcia w punkcie x_0.

Ćwiczenie 9. *Znaleźć punkty przegięcia podanych funkcji:*

a) $f(x) = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$;

b) $g(x) = e^{\cos x}$;

c) $h(x) = x^2 \ln x$;

d) $s(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.