Ciągi liczbowe

Wykład

- Podstawowe określenia
- Granice ciągów
- Twierdzenia o granicach właściwych ciągów
- Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów

Definicja 1. (*ciąg liczbowy*)
Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez przez a_n, b_n, itp. Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez (a_n), (b_n),itp.

Uwaga 1. Ciągi będziemy przedstawiali na płaszczyźnie jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n), gdzie $n \in \mathbb{N}$. *Obrazowo*: ciąg można traktować jako zbiór ponumerowanych liczb rzeczywistych ustawionych według rosnących numerów.

Rysunek 1. *Ciąg* (a_n).

Przykład 1. *Ciągi liczbowe możemy określić:*

1. wzorem:

a) $a_n = 2^n$;

b) $b_n = \frac{1}{\sin n}$;

c) $c_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$;

2. rekurencyjnie *(tzn. każdy wyraz ciągu wyraża się przez poprzednie):*

a) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 3$ *- ciąg arytmetyczny;*

b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n$ *- ciąg geometryczny;*

c) $c_1 = 2, c_{n+1} = c_1 c_2 \cdot \cdots \cdot c_n$;

3. opisowo

a) a_n *-* n*-ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby* π;

b) b_n *-* n*-ta liczba pierwsza.*

Definicja 2. (*granica właściwa ciągu*)
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a_n - a| < \varepsilon.$$

Uwaga 2. Ciąg jest zbieżny do granicy a, gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko punktu a.

Rysunek 2. *Granica właściwa ciągu.*

Definicja 3. (*granica niewłaściwa ciągu*)
Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad a_n > \varepsilon.$$

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \quad a_n < \varepsilon.$$

Uwaga 3. Ciąg jest zbieżny do granicy ∞, gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby. Ciąg jest zbieżny do granicy $-\infty$, gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są mniejsze od dowolnie małej liczby.

Rysunek 3. *Granica niewłaściwa* ∞*.*

Rysunek 4. *Granica niewłaściwa* $-\infty$*.*

Uwaga 4. Ciągi, które nie mają granicy właściwej ani niewłaściwej, nazywamy ciągami rozbieżnymi. Przykładami takich ciągów są: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \sin\frac{n\pi}{2}$. W niektórych podręcznikach ciągi zbieżne do ∞ lub $-\infty$ nazywa się ciągami rozbieżnymi do ∞ lub $-\infty$.

Przykład 2. *Przykłady ciągów posiadających granicę:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{n} = 0$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$*;*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a} = \infty$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$*;*

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, *gdzie* $a \in \mathbb{R}$*;*

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*;*

e) $\lim\limits_{n\to\infty} p^n = 0$, *gdzie* $p \in \mathbb{R}$ *i* $|p| < 1$*.*

Twierdzenie 1. *(*o jednoznaczności granicy ciągu*)*
Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie 2. *(*o niezależności granicy od początkowych wyrazów ciągu*)*
Granica ciągu zbieżnego do granicy właściwej lub niewłaściwej nie zależy od wartości skończenie wielu jego początkowych wyrazów.

Twierdzenie 3. *(*o arytmetyce granic ciągów*)*

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$,

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$,

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^p$, *gdzie* $p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, *gdzie* $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Z pracy egzaminacyjnej:

„Dla dowolnych ciągów (x_n),(y_n) zachodzi równość

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

gdyż logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów”.

Ćwiczenie 1. *Obliczyć podane granice ciągów:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n^3}{n^3 + 1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \cdots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2^n - 1}{3^n + 2}\right)^5$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3 + 1}}{n\sqrt{n^2 + 1}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)! + n!}$.

Twierdzenie 4. *(*o trzech ciągach*)*
Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n), (c_n)$ *spełniają warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$,

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Twierdzenie o policjantach i pijaku.

Dwaj policjanci prowadzą między sobą pijaka. Jeżeli policjanci idą do izby wytrzeźwień, to trafi tam także pijak.

Ćwiczenie 2. *Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, obliczyć podane granice:*

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$;

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2 + n \sin n}{n^2 + 1}$;

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$;

d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n^3 + n^2 + 1}$.

Twierdzenie 5. *(*określenie liczby e*)*
Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy przez* e*, mamy zatem:*

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Uwaga 5. Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

$$2,7182818285.$$

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy przez ln, mamy zatem: $\ln x := \log_e x$.
Znane są następujące, łatwe do zapamiętania, przybliżenia wymierne liczby e:

$$e \approx \frac{878}{323}, \qquad e \approx \frac{335588}{123456}.$$

Twierdzenie 6. *(o ciągach z granicą e)*
Jeżeli ciąg (a_n) o wyraz dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

Jeżeli ciąg (a_n) o wyraz dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞, to

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\frac{1}{e}.$$

Uwaga 6. Powyższe twierdzenia pozostają prawdziwe także wtedy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$.

Ćwiczenie 3. *Obliczyć podane granice ciągów:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{n}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$.

Twierdzenie 7. *(*o dwóch ciągach*)*
Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ *spełniają warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$,

to

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Ćwiczenie 4. *Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach, obliczyć granice:*
a) $\lim\limits_{n\to\infty} [4^n + (-1)^n]$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(2\cos n - 5)n^2\right]$;
c) $\lim\limits_{n\to\infty} [2^n + \sin n]$.

Twierdzenie 8. *(o granicach niewłaściwych ciągów)*

$a+\infty=\infty$	$a\cdot\infty=\infty$
$\frac{a}{\infty}=0$	$\frac{a}{0^+}=\infty$
$a^\infty=0$ *dla* $0^+\leqslant a<1$	$a^\infty=\infty$ *dla* $a>1$
$\infty^b=0$ *dla* $b<0$	$\infty^b=\infty$ *dla* $b>0$

Uwaga 7. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu odpowiednich twierdzeń. Np. równość $\dfrac{a}{0^+}=\infty$, jest skróconą postacią twierdzenia:
Jeżeli ciągi $(a_n),(b_n)$ spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$, gdzie $b_n>0$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$,

to

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty.$$

Ćwiczenie 5. *Obliczyć podane granice ciągów:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-(n+1)!}{n+1}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2+1}\right)^{n-n^2}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2+n^2-n^5}{1+n^3}$.

Definicja 4. (*wyrażenia nieoznaczone*)
Symbole:

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

Przykład 3. *Weźmy ciągi* (x_n) *i* (y_n) *spełniające warunki:* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. *Wtedy granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ *przyjmuje różne wartości albo nie istnieje.*

a) Dla $x_n = n^2$ *oraz* $y_n = n$ *mamy* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

b) Dla $x_n = a\cdot n$, $(a > 0)$ *oraz* $y_n = n$ *mamy* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} a = a$.

c) Dla $x_n = n$ *oraz* $y_n = n^2$ *mamy* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

d) Dla $x_n = (2 + (-1)^n)n$ *oraz* $y_n = n$ *mamy* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} (2 + (-1)^n)$ *- nie istnieje.*