

Ciągi liczbowe

Wykład nr 8 (Inżynieria sanitarna)

- Podstawowe określenia
- Granice ciągów
- Twierdzenia o granicach właściwych ciągów
- Twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów

Definicja 1. (*ciąg liczbowy*)

Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych. Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n -tym wyrazem ciągu i oznaczamy przez a_n, b_n, \dots . Ciągi o takich wyrazach oznaczamy odpowiednio przez $(a_n), (b_n), \dots$.

Uwaga 1. Ciągi będziemy przedstawiali na płaszczyźnie jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}$. *Obrazowo:* ciąg można traktować jako zbiór ponumerowanych liczb rzeczywistych ustawionych według rosnących numerów.

Rysunek 1. *Ciąg (a_n) .*

Przykład 1. Ciągi liczbowe możemy określić:

1. wzorem:

a) $a_n = 2^n$;

b) $b_n = \frac{1}{\sin n}$;

c) $c_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$;

2. rekurencyjnie (tzn. każdy wyraz ciągu wyraża się przez poprzednie):

a) $a_1 = 7, a_{n+1} = a_n + 3$ - ciąg arytmetyczny;

b) $b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n$ - ciąg geometryczny;

c) $c_1 = 2, c_{n+1} = c_1 c_2 \dots c_n$;

3. opisowo

a) a_n - n -ta cyfra po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby π ;

b) b_n - n -ta liczba pierwsza.

Definicja 2. (*granica właściwa ciągu*)

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy właściwej $a \in \mathbb{R}$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 |a_n - a| < \varepsilon.$$

Uwaga 2. Ciąg jest zbieżny do granicy a , gdy jego dostatecznie dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko punktu a .

Rysunek 2. *Granica właściwa ciągu.*

Definicja 3. (*granica niewłaściwa ciągu*)

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞ , co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n > \varepsilon.$$

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$, co zapisujemy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n < -\varepsilon.$$

Uwaga 3. Ciąg jest zbieżny do granicy ∞ , gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są większe od dowolnie dużej liczby. Ciąg jest zbieżny do granicy $-\infty$, gdy dostatecznie dalekie wyrazy tego ciągu są mniejsze od dowolnie małej liczby.

Rysunek 3. *Granica niewłaściwa ∞ .*

Rysunek 4. *Granica niewłaściwa $-\infty$.*

Uwaga 4. Ciągi, które nie mają granicy właściwej ani niewłaściwej, nazywamy ciągami rozbieżnymi. Przykładami takich ciągów są: $a_n = (-1)^n$, $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$. W niektórych podręcznikach ciągi zbieżne do ∞ lub $-\infty$ nazywa się ciągami rozbieżnymi do ∞ lub $-\infty$.

Przykład 2. Przykłady ciągów posiadających granicę:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a} = \infty$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$;

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = 0$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ i $|p| < 1$.

Twierdzenie 1. (o jednoznaczności granicy ciągu)
Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.

Twierdzenie 2. (o niezależności granicy od początkowych wyrazów ciągu)
Granica ciągu zbieżnego do granicy właściwej lub niewłaściwej nie zależy od wartości skończenie wielu jego początkowych wyrazów.

Twierdzenie 3. (o arytmetyce granic ciągów)

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$ gdzie $c \in \mathbb{R},$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right),$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n},$
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p,$ gdzie $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n},$ gdzie $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$

Z pracy egzaminacyjnej:

„Dla dowolnych ciągów $(x_n), (y_n)$ zachodzi równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

gdyż logarytm iloczynu równa się sumie logarytmów”.

Ćwiczenie 1. Obliczyć podane granice ciągów:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n^3}{n^3 + 1};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right);$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{\sqrt{9n^4 + 1}};$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n - 1}{3^n + 2} \right)^5;$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1) \sqrt[3]{8n^3 + 1}}{n \sqrt{n^2 + 1}};$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)! - n!}{(n + 1)! + n!}.$$

Twierdzenie 4. (o trzech ciągach)

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunki:

- 1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla każdego $n \geq n_0$,*
- 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = b$,*

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Twierdzenie o policjantach i pijaku.

Dwaj policjanci prowadzą między sobą pijaka. Jeżeli policjanci idą do izby wytrzeźwień, to trafi tam także pijak.

Ćwiczenie 2. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach, obliczyć podane granice:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n \sin n}{n^2 + 1};$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}};$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{n^3 + n^2 + 1}.$

Twierdzenie 5. (określenie liczby e)

Ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy przez e , mamy zatem:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Uwaga 5. Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa

2,7182818285.

Logarytm przy podstawie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy przez \ln , mamy zatem: $\ln x := \log_e x$.

Znane są następujące, łatwe do zapamiętania, przybliżenia wymierne liczby e :

$$e \approx \frac{878}{323}, \quad e \approx \frac{335588}{123456}.$$

Twierdzenie 6. (o ciągach z granicą e)

Jeżeli ciąg (a_n) o wyraz dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Jeżeli ciąg (a_n) o wyraz dodatnich jest zbieżny do granicy niewłaściwej ∞ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \frac{1}{e}.$$

Uwaga 6. Powyższe twierdzenia pozostają prawdziwe także wtedy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$.

Ćwiczenie 3. Obliczyć podane granice ciągów:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n};$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{2n+1};$$

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^{n+1}};$$

$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^n;$$

$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}.$$

Twierdzenie 7. (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ spełniają warunki:

1. $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty.$$

Ćwiczenie 4. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach, obliczyć granice:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} [4^n + (-1)^n]$;
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [(2 \cos n - 5)n^2]$;
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} [2^n + \sin n]$.

Twierdzenie 8. (o granicach niewłaściwych ciągów)

$a + \infty = \infty$	$a \cdot \infty = \infty$
$\frac{a}{\infty} = 0$	$\frac{a}{0^+} = \infty$
$a^\infty = 0$ dla $0^+ \leq a < 1$	$a^\infty = \infty$ dla $a > 1$
$\infty^b = 0$ dla $b < 0$	$\infty^b = \infty$ dla $b > 0$

Uwaga 7. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu odpowiednich twierdzeń. Np. równość $\frac{a}{0^+} = \infty$, jest skróconą postacią twierdzenia:

Jeżeli ciągi $(a_n), (b_n)$ spełniają warunki:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, gdzie $b_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty.$$

Ćwiczenie 5. Obliczyć podane granice ciągów:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - (n + 1)!}{n + 1};$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 1} \right)^{n - n^2};$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + 3} - \sqrt{n});$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + n^2 - n^5}{1 + n^3}.$

Definicja 4. (*wyrażenia nieoznaczone*)

Symbole:

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0
-------------------	------------------	---------------	-------------------------	------------	------------	-------

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci ciągów je tworzących.

Przykład 3. Weźmy ciągi (x_n) i (y_n) spełniające warunki:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$. Wtedy granica $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n}$

przyjmuje różne wartości albo nie istnieje.

a) Dla $x_n = n^2$ oraz $y_n = n$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$.

b) Dla $x_n = a \cdot n$, ($a > 0$) oraz $y_n = n$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a = a$.

c) Dla $x_n = n$ oraz $y_n = n^2$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

d) Dla $x_n = (2 + (-1)^n)n$ oraz $y_n = n$

mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + (-1)^n)$ - nie istnieje.