Macierze liczbowe

Wykład

- Podstawowe określenia
- Działania na macierzach
- Wyznacznik macierzy i jego własności
- Macierz odwrotna
- Rząd macierzy i jego własności
- Wartości i wektory własne macierzy

Definicja 1. (*macierz rzeczywista i zespolona*)
Macierzą rzeczywistą (zespoloną) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$, nazywamy prostokątną tablicę złożoną z $m \cdot n$ liczb rzeczywistych (zespolonych) ustawionych w m wierszach i n kolumnach.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Uwaga 1. Macierze będziemy oznaczali dużymi literami alfabetu, np. A, B, X itp. Element macierzy A stojący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie oznaczamy przez a_{ij}.

Twierdzenie 1. (równość macierzy)
Macierze A i B są równe, gdy mają te same wymiary $m \times n$ oraz $a_{ij} = b_{ij}$ dla każdego $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

Przykład 1. *Macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

jest macierzą rzeczywistą wymiaru 2×3, natomiast macierz

$$B = \begin{bmatrix} 1 - i & i \\ -5 + 2i & 2i \\ -1 + 3i & -i \end{bmatrix}$$

jest macierzą zespoloną wymiaru 3×2.

Definicja 2. (*macierz zerowa*)
Macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0 nazywamy macierzą zerową wymiaru $m \times n$ i oznaczamy przez $0_{m\times n}$ lub 0.

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Definicja 3. (*macierz kwadratowa*)
Macierz, której liczba wierszy równa się liczbie kolumn nazywamy macierzą kwadratową. Liczbę wierszy (kolumn) nazywamy wtedy stopniem macierzy kwadratowej. Elementy macierzy, które mają ten sam numer wiersza co kolumny, tworzą główną przekątną macierzy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 4. (*macierz trójkątna*)
Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące nad główną przekątną są zerowe nazywamy macierzą trójkątną dolną.

Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy stojące pod główną przekątną są zerowe nazywamy macierzą trójkątną górną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 5. (*macierz diagonalna*)
Macierz kwadratową stopnia $n \geqslant 2$, w której wszystkie elementy, poza stojącymi na głównej przekątnej, są zerowe nazywamy macierzą diagonalną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja 6. (*macierz jednostkowa*)
Macierz diagonalną stopnia n, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1, nazywamy macierzą jednostkową i oznaczamy przez I_n lub przez I.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Definicja 7. (*suma i różnica macierzy*)
Niech $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ będą macierzami wymiaru $m \times n$. Sumą (różnicą) macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$, której elementy są określone wzorem: $c_{ij} := a_{ij} \pm b_{ij}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $C = A \pm B$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 1. *Obliczyć sumy i różnice podanych par macierzy:*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 - 2i \\ 3 + 5i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3i \\ -2 \end{bmatrix}$.

Definicja 8. (*iloczyn macierzy przez liczbę*)
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$ oraz niech α będzie liczbą rzeczywistą lub zespoloną. Iloczynem macierzy A przez liczbę α nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} := \alpha \cdot a_{ij}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $B = \alpha A$.

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ćwiczenie 2. *Obliczyć iloczyny podanych liczb i macierzy:*

a) $\alpha = 1 - i$, $A = \begin{bmatrix} i & 0 & 3+2i & 5 \\ 1+i & 2 & -3i & 1-i \end{bmatrix}$;

b) $\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & -24 \\ -8 & 12 & -12 \\ 16 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Twierdzenie 2. *(*własności działań na macierzach*)*
Niech A, B, C *będą dowolnymi macierzami rzeczywistymi (zespolonymi) tego samego wymiaru oraz niech* α, β *będą liczbami rzeczywistymi (zespolonymi). Wtedy*
1. $A + B = B + A$*;*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$*;*
3. $A + 0 = 0 + A = A$*;*
4. $A + (-A) = 0$*;*
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$*;*
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$*;*
7. $1 \cdot A = A$*;*
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$*.*

Definicja 9. (*iloczyn macierzy*)
Niech macierz $A = [a_{ij}]$ ma wymiar $m \times n$, a macierz $B = [b_{ij}]$ ma wymiar $n \times k$. Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = [c_{ij}]$ wymiaru $m \times k$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} := a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Piszemy wtedy $C = AB$.

Uwaga 2. Element c_{ij} iloczynu macierzy A i B otrzymujemy sumując iloczyny odpowiadających sobie elementów i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B. Iloczyn macierzy A i B można obliczyć tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A równa się liczbie wierszy B.

Ćwiczenie 3. *Obliczyć iloczyny podanych par macierzy:*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$;

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$;

c) $A = \begin{bmatrix} i & 1+2i \\ -3 & 2-3i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 5+i & 4-3i \end{bmatrix}$.

Uwaga 3. Mnożenie macierzy nie jest działaniem przemiennym, tzn. dla dowolnych różnych macierzy A, B mamy:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Ćwiczenie 4. *Obliczyć iloczyny AB i BA dla macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Definicja 10. (*macierz transponowana*)
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą wymiaru $m \times n$. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz $B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, której elementy są określone wzorem:

$$b_{ij} := a_{ji},$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$. Macierz transponowaną do macierzy A oznaczamy przez A^T.

Uwaga 4. Przy transponowaniu, kolejne wiersze macierzy wyjściowej stają się kolejnymi kolumnami macierzy transponowanej.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definicja 11. (*wyznacznik macierzy*)
Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Wyznacznikiem nazywamy funkcję rzeczywistą (zespoloną) det określoną na zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n spełniającą warunki:
1. $\det[k_1 \ldots ck_j \ldots k_n] = c \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n]$
dla każdego $c \in \mathbb{R} (c \in \mathbb{C})$, gdzie k_j oznacza j-tą kolumnę macierzy;
2. $\det[k_1 \ldots k_j + k_j' \ldots k_n] = \det[k_1 \ldots k_j \ldots k_n] + \det[k_1 \ldots k_j' \ldots k_n]$;
3. $\det[k_1 \ldots k_i \ldots k_j \ldots k_n] = -\det[k_1 \ldots k_j \ldots k_i \ldots k_n]$;
4. $\det I_n = 1$.

Uwaga 5. Wyznacznik macierz A oznaczamy także przez det$[a_{ij}]$ lub $|A|$, a w formie rozwiniętej przez

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \text{lub} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Będziemy mówili zamiennie: stopień wyznacznika $\longleftrightarrow$ stopień macierzy, element wyznacznika $\longleftrightarrow$ element macierzy, wiersz wyznacznika $\longleftrightarrow$ wiersz macierzy, kolumna wyznacznika $\longleftrightarrow$ kolumna macierzy.

Twierdzenie 3. *(*reguła Sarrusa* obliczania wyznaczników stopnia pierwszego, drugiego i trzeciego*):*

$$\det [a] = a,$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc,$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Uwaga 6. Sposób ten nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

*Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) - matematyk francuski.

Ćwiczenie 5. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1+i & 5i \\ -4 & 3-2i \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} i & 1 & 1-i \\ 0 & -2 & 4+3i \\ 2i & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna wyznaczników drugiego i trzeciego stopnia.*

Definicja 12. (*minor macierzy kwadratowej*)
Skreślając w wyznaczniku macierzy kwadratowej A, i-ty wiersz i j-tą kolumnę, otrzymamy wyznacznik stopnia $n-1$, który nazywamy minorem macierzy kwadratowej i oznaczamy symbolem M_{ij}.

Definicja 13. (*dopełnienie algebraiczne*)
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę:

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Ćwiczenie 6. *W podanych macierzach obliczyć dopełnienia algebraiczne zaznaczonych elementów:*

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & -3i \\ \boxed{4} & 2-5i \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 1 \\ -3 & 6 & -4 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & \boxed{5} & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 4. *(*rozwinięcie Laplace'a* wyznacznika*)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz niech liczby i, j, gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n$ będą ustalone. Wtedy wyznacznik macierzy A można obliczyć ze wzorów:

1. $$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$
(wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem i-tego wiersza)

2. $$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$
(wzór ten nazywamy rozwinięciem Laplace'a wyznacznika względem j-tej kolumny)

*Pierre Simon de Laplace (1749-1827) - matematyk, fizyk i astronom francuski.

Ćwiczenie 7. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} i & 0 & -3 \\ 2 & -1+i & 5 \\ 1+i & 3i & -2 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Twierdzenie 5. *(*wyznacznik macierzy trójkątnej*)*
Wyznacznik macierzy trójkątnej dolnej lub górnej jest równy iloczynowi elementów stojących na jego głównej przekątnej.

Ćwiczenie 8. *Oblicz wyznaczniki:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 1-i & 1+i & 2 & 4-3i \\ 0 & 2i & 3-i & -2+i \\ 0 & 0 & -3 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 5i \end{vmatrix}$.

Twierdzenie 6. *(*własności wyznaczników*)*
1. *Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę złożoną z samych zer jest równy 0, tzn.*

$$\det\,[k_1 \ldots 0 \ldots k_n] = 0,$$

gdzie k_j oznacza j-tą kolumnę macierzy.

2. *Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (patrz warunek 3 w def. 11).*

3. *Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe kolumny jest równy 0, tzn.*

$$\det\,[k_1 \ldots k_j \ldots k_j \ldots k_n] = 0.$$

__4.__ Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy (patrz warunek 1 w def. 11).

__5.__ Wyznacznik macierzy kwadratowej, której pewna kolumna jest sumą dwóch składników jest równy sumie wyznaczników macierzy, w których ta kolumna jest zastąpiona tymi składnikami (patrz warunek 2 w def. 11).

__6.__ Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do dowolnej kolumny dodamy inną kolumnę tej macierzy pomnożoną przez dowolną liczbę, tzn.

$$\det[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = \det[k_1 \dots k_i + c \cdot k_j \dots k_j \dots k_n].$$

__7.__ Wyznacznik macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe, tzn.

$$\det A = \det(A^T).$$

Uwaga 7. Korzystając z powyższych własności wyznaczników można istotnie uprościć ich obliczanie. Pozwalają one tak przekształcić wyznacznik, aby w jego wybranym wierszu lub kolumnie pozostawić co najwyżej jeden element niezerowy.

Ćwiczenie 9. *Obliczyć wyznaczniki wykorzystując ich własności:*

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix};\ b)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix};\ c)\ \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 7 & 7 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Definicja 14. (*macierz odwrotna*)
Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, która spełnia warunek:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową stopnia n.

Uwaga 8. Jeżeli macierz A ma macierz odwrotną, to nazywamy ją *odwracalną* i wówczas $\det A \neq 0$.

Definicja 15. (*macierz osobliwa i nieosobliwa*)
Macierz kwadratową A nazywamy macierzą osobliwą, gdy

$$\det A = 0.$$

W przeciwnym wypadku mówimy, że macierz A jest nieosobliwa.

Twierdzenie 7. *(*o macierzy kwadratowej*)*

1. *Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa.*

2. *Jeżeli macierz* $A = [a_{ij}]$ *stopnia* n *jest nieosobliwa, to*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A^D \right)^T,$$

gdzie A^D *oznacza macierz dopełnień algebraicznych macierzy* A*, tzn.*

$$A^D = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 10. *Znaleźć macierze odwrotne do podanych:*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 11. *Rozwiąż podane równania macierzowe:*

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Definicja 16. (*minor macierzy prostokątnej*)
Jeżeli w macierzy prostokątnej A, skreślimy pewną liczbę wierszy
i kolumn, tak żeby elementy nieskreślone utworzyły macierz kwadratową M, to wyznacznik $\det M$ nazywamy minorem macierzy A.

Definicja 17. (*rząd macierzy*)
Rzędem macierzy A nazywamy stopień jej największego niezerowego minora. Rząd macierzy oznaczmy przez: $\mathrm{r}(A)$ lub $\mathrm{rz}A$.

Uwaga 9. Zauważmy, że jeżeli A jest macierzą wymiaru $m \times n$, to $\mathrm{rz}A \leqslant \min(m, n)$.

Ćwiczenie 12. *Określić rzędy macierzy:*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 8. *(własności rzędów)*
Rząd macierzy nie ulegnie zmianie, jeżeli:
1. *przestawimy miejscami dowolne kolumny macierzy, tzn.*

$$rz[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = rz[k_1 \dots k_j \dots k_i \dots k_n].$$

2. *kolumny macierzy macierzy pomnożymy przez liczbę różną od zera, tzn.*

$$rz[k_1 \dots k_i \dots k_n] = rz[ck_1 \dots ck_i \dots ck_n].$$

3. *do dowolnej kolumny macierzy dodamy inną kolumnę pomnożoną przez dowolną liczbę, tzn.*

$$rz[k_1 \dots k_i \dots k_j \dots k_n] = rz[k_1 \dots k_i + ck_j \dots k_j \dots k_n].$$

4. *w danej macierzy zamienimy kolumny na wiersze, tzn.*

$$rzA = rz(A^T).$$

Ćwiczenie 13. *Określić rzędy macierzy:*

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$b)\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$c)\ C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definicja 18. (*wartość własna macierzy*)
Wartością własną macierzy A nazywamy każdy (w tym również zespolony) pierwiastek λ *równania charakterystycznego*

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0,$$

gdzie I oznacza macierz jednostkową. Wielomian

$$W_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I)$$

nazywamy *wielomianem charakterystycznym* macierzy A.

Ćwiczenie 14. *Wyznaczyć wartości własne podanych macierzy*

a) $A = [10]$;

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$;

c) $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

Definicja 19. (*wektor własny macierzy*)
Każdy niezerowy wektor $x \in \mathbb{C}^n$ spełniający równanie

$$Ax = \lambda x$$

nazywamy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

Ćwiczenie 15. *Wyznaczyć wektory własne macierzy*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$