Liczby zespolone

Wykład nr 1

- Podstawowe definicje i własności
- Postać algebraiczna i sprzężenie
- Moduł i argument
- Postać trygonometryczna
- Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Będziemy stosować następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych,
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ - zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ - zbiór liczb wymiernych,
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych.

Oznaczenia tych zbiorów pochodzą od początkowych liter wyrazów w języku angielskim i niemieckim:

$\mathbb{N}$atural, $\mathbb{Z}$ahl, $\mathbb{Q}$uotient, $\mathbb{R}$eal, $\mathbb{C}$omplex.

Rysunek 1. *Relacje między zbiorami* $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$ *i* $\mathbb{C}$.

Notka historyczna 1. *Pierwsze próby opisania liczb zespolonych miały miejsce w XVI wieku. Jako pierwszy Cardano[*] wykorzystuje formalnie symbol $\sqrt{-1}$ do obliczania pierwiastków rzeczywistych stopnia trzeciego (patrz wzory Cardana). Liczby zespolone były odtąd stosowane do obliczeń, choć ich istnienie wywoływało liczne spory. Jak podaje Laurence Young w 1820 roku studenci inżynierii w Paryżu wzniecili bunt przeciwko liczbom zespolonym twierdząc, że są one zupełnie bezużyteczne, a ponadto w ogóle nie istnieją. Nie dziwi zatem fakt, że trzy wieki wcześniej Cardano został uwięziony po zarzutem uprawiania czarnej magii. Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Gauss[†]. Jego interpretacja liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.*

[*] *Geronimo Cardano (1501-1576)-matematyk, filozof i lekarz włoski.*

[†] *Carl Friedich Gauss (1777-1855)-matematyk, astronom, i fizyk niemiecki.*

Definicja 1. (*liczba zespolona, płaszczyzna zespolona*)
Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, np. (x, y), (u, v), (a, b). Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z, w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$ (z ang. $\mathbb{C}$omplex). Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} .$$

Uwaga 1. Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y). W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną zespoloną. Wektor o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y) nazywamy *wektorem wodzącym* liczby (x, y).

Rysunek 2. *Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 1. *Narysować na płaszczyźnie zespolonej liczby:*

a) $z_1 = (3, 2)$;

b) $z_2 = (-3, 1)$;

c) $z_3 = (-2, 0)$;

d) $z_4 = (0, -2)$.

Definicja 2. (*równość, suma i iloczyn liczb zespolonych*)
Niech $z_1 = (x_1, y_1)$,$z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi.

1. Równość liczb zespolonych określamy przez warunek:

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

2. Sumę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. Iloczyn liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Rysunek 3. *Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych.*

Rysunek 4. *Konstrukcja iloczynu liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 2. *Niech* $z_1 = (0, 1)$,$z_2 = (3, -4)$ *oraz* $z_3 = (\sqrt{2}, -3)$.
Obliczyć
a) $z_1 + z_2$, $z_2 + z_3$;
b) $z_1 \cdot z_2$,$z_2 \cdot z_3$.

Definicja 3. (*różnica i iloraz liczb zespolonych*)
Niech $z_1 = (x_1, y_1)$,$z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi.

1. Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

2. Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right),$$

o ile $z_2 \neq 0$ (tzn. $x_2 \neq 0$ i $y_2 \neq 0$).

Rysunek 5. *Interpretacja geometryczna różnicy liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 3. *Obliczyć:*

a) $(4,-1)-(-3,5)$;

b) $(-5,6)-(1,-4)$;

c) $\dfrac{(-1,2)}{(3,4)}$;

d) $\dfrac{(0,-6)}{(0,2)}$.

Uwaga 2. Wszystkie reguły czterech podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) znane dla liczb rzeczywistych obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

Twierdzenie 1. *(*zbiór liczb rzeczywistych jako podzbiór zbioru liczb zespolonych*)*
Liczby zespolone postaci $(x, 0)$*, gdzie* $x \in \mathbb{R}$*, mają następujące własności:*
1. $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$*;*
2. $(x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0)$*;*
3. $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$*;*
4. $\dfrac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\dfrac{x_1}{x_2}, 0\right)$*, gdzie* $x_2 \neq 0$*.*

Uwaga 3. Z własności tych wynika, że zbiór $\widetilde{\mathbb{R}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Będziemy pisali x zamiast $(x, 0)$.

Rysunek 6. *Zbiór* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *jako podzbiór* $\mathbb{C}$*.*

Definicja 4. Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy ją przez i, zatem

$$i := (0, 1).$$

Ćwiczenie 4. *Uzasadnić, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.*

Uwaga 4. Zauważmy, że z powyższego ćwiczenia wynika, że

$$i^2 = -1.$$

Twierdzenie 2. *(*postać algebraiczna liczby zespolonej*)*
Każdą liczbę zespoloną $z = (x, y)$ można przedstawić w postaci:

$$z = x + iy,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ natomiast i jest jednostką urojoną. Liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą *(z łac.* realis*) liczby z, liczbę y nazywamy* częścią urojoną *(z łac.* imaginalis*) liczby z. Stosujemy oznaczenia:*

$$\operatorname{Re} z := x, \ \operatorname{Im} z := y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Rysunek 7. *Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej.*

Rysunek 8. *Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej.*

Uwaga 5. Działania takie jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie wykonywanie na liczbach zespolonych danych w postaci algebraicznej wykonujemy jak na wyrażeniach algebraicznych, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$ (stąd też bierze się nazwa tej postaci liczby zespolonej). Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, należy dzielną i dzielnik pomnożyć przez liczbę $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

Ćwiczenie 5. *Obliczyć: a)* $(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{2}i)$*; b)* $(3i - 2) - (1 - 2i)$*; c)* $(1 + 2i)(-3 + 4i)$*; d)* $\dfrac{4 + 5i}{2 - i}$.

Twierdzenie 3. *(*o równości liczb zespolonych w postaci algebraicznej*)*
Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe, tzn.

$$z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \ \textit{i} \ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Ćwiczenie 6. *Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające podane warunki:*
a) $z^2 + 4i = 0$;
b) $\operatorname{Re} z - 3 \operatorname{Im} z = 2$;
c) $\operatorname{Re}(iz) \geqslant 1$;
d) $\dfrac{z+2}{i-1} = \dfrac{3z+i}{2+i}$;
e) $z^2 - 6z + 10 = 0$.

Definicja 5. (*sprzężenie liczby zespolonej*)
Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z}$ określoną wzorem:

$$\overline{z} := x - iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\mathrm{Re}\, z$.

Rysunek 9. *Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 7. *Rozwiązać równania:*
a) $2z + (3 - i)\overline{z} = 5 + 4i$;
b) $z + i = \overline{z + i}$;
c) $z \cdot \overline{z} + z - \overline{z} = 3 + 2i$;
d) $z + \overline{z} + i(z - \overline{z}) = 5 + 3i$.

Definicja 6. (*moduł liczby zespolonej*)
Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uwaga 6. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczny rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 płaszczyzny zespolonej.

Rysunek 10. *Interpretacja geometryczna modułu liczby zespolonej.*

Rysunek 11. *Interpretacja geometryczna modułu różnicy liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 8. *Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:*
a) $z = -i$;
b) $z = -1 + \sqrt{3}i$;
c) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
d $z = -5 - 12i$.

Twierdzenie 4. (własności modułu liczby zespolonej)
Dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwe są następujące własności:
1. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$;
2. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;
3. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
4. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, *o ile* $z_2 \neq 0$.

Rysunek 12. *Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem.*
a) $|z - z_0| = r$; ***b)*** $|z - z_0| \leqslant r$;
c) $|z - z_0| < r$; ***d)*** $|z - z_0| \geqslant r$;
e) $|z - z_0| > r$; ***f)*** $r \leqslant |z - z_0| \leqslant R$;
g) $|z - z_1| = |z - z_2|$; ***h)*** $|z - z_1| < |z - z_2|$;
i) $|z - z_1| \geqslant |z - z_2|$.

Ćwiczenie 9. *Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:*

a) $|z+i| = 3$;

b) $|2iz+6| \leqslant 4$;

c) $2 < |z+2-i| \leqslant 3$;

d) $|z+5| = |3i-z|$;

e) $\left|\dfrac{z-3}{z-3i}\right| > 1$;

f) $\left|\dfrac{z+i}{z^2+1}\right| \leqslant 1$;

g) $|\overline{z}+2-i| \leqslant |z|$.

Definicja 7. (*argument liczby zespolonej*)
Argumentem liczby zespolonej z nazywamy każdy kąt $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniający układ równań:

$$\begin{cases} \cos\varphi & = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin\varphi & = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Ten spośród argumentów danej liczby z, który spełnia warunek $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczmy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Uwaga 7. Argumenty liczby zespolonej z są miarami zorientowanych kątów nachylenia wektora wodzącego liczby z do osi rzeczywistej. Argument główny liczby zespolonej z jest najmniejszą nieujemną miarą zorientowanego kąta nachylenia wektora wodzącego liczby z do osi rzeczywistej.

Rysunek 13. *Argumenty liczby zespolonej.*

Rysunek 14. *Argument główny liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 10. *Znaleźć argumenty główne podanych liczb zespolonych:*
a) $z = 2$; *b)* $z = i$;
c) $z = -\pi$; *d)* $z = 3 - 3i$;
e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; *f)* $z = -3 + 4i$.

Twierdzenie 5. *(*własności argumentu*)*

Dla dowolnych niezerowych liczb zespolonych z, z_1, z_2 prawdziwe są następujące warunki:

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

2. $\arg z^n = n \arg z$ *dla dowolnego* $n \in \mathbb{N}$,

3. $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

Rysunek 15. *Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem:*

a) $\arg z = \alpha$;

b) $\alpha < \arg z \leqslant \beta$;

c) $\arg(z - z_0) = \alpha$;

d) $\alpha \leqslant \arg(z - z_0) \leqslant \beta$.

Ćwiczenie 11. *Narysować zbiory liczb zespolonych, które spełniają podane warunki:*

a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;

b) $\arg(z+i) = \pi$,

c) $\arg(-z) = \frac{2\pi}{3}$;

d) $\arg(\frac{1}{z}) = \frac{5\pi}{6}$;

e) $\arg(\overline{z}) = \frac{3\pi}{4}$;

f) $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$;

g) $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg(2+i-z) \leqslant \pi$;

h) $\frac{\pi}{4} < \arg(\overline{z}) \leqslant \frac{3\pi}{4}$;

i) $\frac{\pi}{6} \leqslant \arg(\frac{1}{z}) < \frac{\pi}{2}$;

j) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z+1) \leqslant \frac{\pi}{4}$;

k) $\arg(\frac{1}{z+i}) < \pi$.

Twierdzenie 6. *(*postać trygonometryczna liczby zespolonej*)* *Każdą liczbę zespoloną z, można przedstawić w postaci:*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r \geqslant 0$ jest modułem liczby z, natomiast $\varphi \in \mathbb{R}$ jest jednym z jej argumentów.

Ćwiczenie 12. *Zapisz podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:*

a) $z = -1$;

b) $z = 1 + i$;

c) $z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Twierdzenie 7. *(wzór de Moivre'a*)*
Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *gdzie* $r \geqslant 0, \varphi \in \mathbb{R}$ *oraz niech* $n \in \mathbb{N}$. *Wtedy*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ćwiczenie 13. *Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć podane potęgi liczb zespolonych:*
a) $(1+i)^{10}$;
b) $(\sqrt{3}-i)^{60}$;
c) $(\sqrt{2}i-\sqrt{2})^{44}$.

Ćwiczenie 14. *Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyprowadzić wzory na: a)* $\sin 3\varphi$; *b)* $\cos 4\varphi$.

**Abraham de Moivre (1667-1754)-matematyk angielski pochodzenia francuskiego.*

Definicja 8. (*pierwiastek z liczby zespolonej*)
Pierwiastkiem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby z nazywamy każdą liczbę $\xi \in \mathbb{C}$, taką że

$$\xi^n = z,$$

i oznaczamy podobnie jak pierwiastek rzeczywisty symbolem $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie 8. *(*wzór na pierwiastki liczby zespolonej*)*
Każda liczba zespolona $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n. Zbiór tych pierwiastków jest postaci:

$$\sqrt[n]{z} = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\},$$

gdzie

$$\xi_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Uwaga 8. Zbiór pierwiastków stopnia $n \geqslant 3$ z liczby zespolonej $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$ pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ i środku w początku układu współrzędnych.

Ćwiczenie 15. *Obliczyć i narysować pierwiastki z podanych liczb zespolonych: a)* $\sqrt[3]{8i}$*; b)* $\sqrt[6]{-27}$*; c)* $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$*; d)* $\sqrt[8]{1}$.

Ćwiczenie 16. *Rozwiązać podane równania kwadratowe:*
a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0$;
b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0$.