Funkcje dwóch zmiennych

Wykład

- Pochodne cząstkowe
- Pochodne cząstkowe wyższych rzędów
- Różniczka zupełna funkcji
- Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

Definicja 1. (*przestrzeń eukildesowa*)
Przestrzenią euklidesową p-wymiarową nazywamy zbiór wszystkich ciągów p-wyrazowych $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, gdzie $a_i \in \mathbb{R}$ i $i = 1, 2, \ldots n$.

Uwaga 1. Elementy a_i tych ciągów nazywa się współrzędnymi, a same ciągi - wektorami albo punktami przestrzeni euklidesowej p-wymiarowej.

Uwaga 2. Przestrzeń euklidesową p-wymiarową będziemy oznaczać symbolem $\mathbb{R}^p$, natomiast jej elementy dużymi literami, np. $A = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$.

Uwaga 3. Przestrzeń euklidesową dwuwymiarową $\mathbb{R}^2$ możemy interpretować geometrycznie jako płaszczyznę, elementy tej płaszczyzny $A = (a_1, a_2)$ jako punkty płaszczyzny, dla których a_1 oznacza odciętą, a a_2 rzędną punktu A.

Uwaga 4. Przestrzeń euklidesowa trójwymiarowa $\mathbb{R}^3$ jest (znaną nam z geometrii) przestrzenią, w której liczby a_1, a_2, a_3 są współrzędnymi punktu $A = (a_1, a_2, a_3)$.

Definicja 2. (*funkcja dwóch zmiennych*)
Mówimy, że w zbiorze $\mathbb{A}$ (zwanym dziedziną funkcji) zawartym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ została określona pewna funkcja f, jeżeli każdemu punktowi $P = (x, y)$ ze zbioru $\mathbb{A}$ jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba z. Przyporządkowanie to zapisujemy w postaci:

$$z = f(x, y).$$

Przykład 1. *Funkcje* $z = \dfrac{1}{x-y}, z = \sqrt{x^2 - y^2}$ *są przykładami funkcji dwóch zmiennych.*

Definicja 3. (*pochodna cząstkowa*)
Pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji dwóch zmiennych $z = f(x,y)$ w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej x nazywamy granicę (jeżeli istnieje):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Pochodną cząstkową (rzędu pierwszego) funkcji $z = f(x,y)$ w punkcie (x_0, y_0) względem zmiennej y definiujemy jako granicę:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Uwaga 5. Pochodne cząstkowe funkcji $z = f(x, y)$ względem zmiennej x oznaczamy symbolami

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \qquad \text{lub} \qquad z'_x, \quad f'_x(x,y),$$

a względem zmiennej y odpowiednio

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad \text{lub} \qquad z'_y, \quad f'_y(x,y).$$

Uwaga 6. W praktyce pochodną cząstkową względem zmiennej x obliczamy tak jak zwykłą pochodną funkcji jednej zmiennej x, przy czym zmienną y traktujemy jak stałą. Podobnie, obliczając pochodną cząstkową względem zmiennej y, zmienną x traktujemy jak stałą.

Definicja 4. (*funkcja klasy* C^1)
Funkcję dwóch zmiennych, mającą pochodne rzędu pierwszego ciągłe, nazywamy funkcją klasy C^1.

Ćwiczenie 1. *Oblicz pochodne cząstkowe następujących funkcji:*
a) $z = 3x^2y^2 - x\cos y$,
b) $z = x^{\sqrt{y}}$.

Ćwiczenie 2. *Wykazać, że funkcja* $z = \ln(e^x + e^y)$ *spełnia równanie różniczkowe* $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Ćwiczenie 3. *Wykazać, że funkcja* $z = e^{\frac{x}{y^2}}$ *spełnia równanie różniczkowe* $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Definicja 5. (*różniczka zupełna funkcji*)
Różniczką zupełną funkcji $z = f(x, y)$, klasy C^1, w punkcie (x_0, y_0) nazywamy funkcję liniową df przyrostów $\triangle x = x - x_0$ i $\triangle y = y - y_0$ określoną wzorem:

$$df(\triangle x, \triangle y) := f'_x(x_0, y_0)\triangle x + f'_y(x_0, y_0)\triangle y.$$

Twierdzenie 1. *(*zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych*)*
Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest klasy C^1,to

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) \approx f(x_0, y_0) + df(\triangle x, \triangle y).$$

Ćwiczenie 4. *Obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:*
a) $(1.02)^{3.01}$
b) $\sqrt{(6.2)^2 + (8.1)^2}$
c) $\dfrac{8.04}{2.02}$.

Definicja 6. (*pochodna cząstkowa rzędu drugiego*)
Pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji $z = f(x, y)$ nazywamy pochodne cząstkowe pochodnych $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$. Wszystkich pochodnych cząstkowych rzędu drugiego funkcji $z = f(x, y)$ jest cztery, mianowicie:

$$f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

przy czym zapis ∂x^2 jest skrótem zapisu $\partial x \partial x$.

Uwaga 7. Pochodne cząstkowe f''_{xx} i f''_{yy} nazywamy pochodnymi czystymi, natomiast pochodne f''_{xy} i f''_{yx} nazywamy pochodnymi mieszanymi.

Definicja 7. (*funkcja klasy* C^2)
Funkcję dwóch zmiennych, mającą ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego, nazywamy funkcją klasy C^2.

Twierdzenie 2. *(*Schwarza o pochodnych mieszanych*)*
Jeżeli funkcja f jest klasy C^2, to pochodne mieszane, różniące się tylko kolejnością różniczkowania, są parami równe.

Ćwiczenie 5. *Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji* $z = \ln(x^2 + y)$.

Twierdzenie 3. *(*warunek konieczny istnienia ekstremum*)*
Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ *klasy* C^1 *ma w punkcie* (x_0, y_0) *ekstremum lokalne, to*

$$f'_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \textit{i} \qquad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Twierdzenie 4. *(*warunek wystarczający istnienia ekstremum*)*
Jeżeli funkcja $z = f(x,y)$ *klasy* C^2 *spełnia warunki:*
1. $f'_x(x_0,y_0) = 0 \quad i \quad f'_y(x_0,y_0) = 0$,
2. $W(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0,y_0) & f''_{xy}(x_0,y_0) \\ f''_{yx}(x_0,y_0) & f''_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$,
to funkcja $z = f(x,y)$ *ma w punkcie* (x_0,y_0) *ekstremum, przy czym jeżeli*

$$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0,$$

to jest to minimum lokalne, jeżeli zaś

$$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0,$$

to jest maksimum lokalne.

Uwaga 8. Jeżeli $W(x_0, y_0) < 0$, to funkcja $z = f(x, y)$ nie ma ekstremum w punkcie (x_0, y_0). Jeżeli natomiast $W(x_0, y_0) = 0$, to w pewnych przypadkach funkcja ma ekstremum w punkcie (x_0, y_0) (np. funkcja $z = x^4 + y^4$ w punkcie $(0, 0)$) , a w innych nie ma (np. funkcja $z = x^3 + y^2$ w punkcie $(0, 0)$).

Ćwiczenie 6. *Zadać ekstrema funkcji*

$$f(x, y) = 3x^2y - x^3 - y^4.$$

Ćwiczenie 7. *Określić wymiary otwartego zbiornika prostopadłościennego o objętości* $32m^3$ *tak, aby jego pole powierzchni było minimalne.*