Laboratorium do wykładu 6

1 Zastosowanie wzoru Taylora

Ćwiczenie 1.

Korzystam ze wzoru wyprowadzonego na str. 2 (wykład 6).

```
→ n:10;
  I[n]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
  I[n−1]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
  abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)     10
(I[n])  1.462651744728083
(%o43)  1.46265173160555
(%o44)  1.312253306018363 10^-8
```

```
→ n:14;
  I[n]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
  I[n−1]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
  abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)     14
(I[n])  1.462651745907155
(%o47)  1.46265174590676
(%o48)  3.954614413714808 10^-13
```

```
→ n:16;
  I[n]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
  I[n−1]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
  abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)     16
(I[n])  1.462651745907181
(%o51)  1.46265174590718
(%o52)  1.554312234475219 10^-15
```

```
→ n:17;
  I[n]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
  I[n−1]:sum(1/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
  abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)     17
(I[n])  1.462651745907181
(%o55)  1.462651745907181
(%o56)  0.0
```

Wystarczy zsumować 17 składników naszego szeregu, aby uzyskać założoną dokładność. Porównajmy jeszcze tą wartość z wartością jaką podaje Maxima.

```
→ integrate(%e^(x^2),x,0,1),numer;
```

rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
rat: replaced 0.8252128793987715 by 41811311/50667303 = 0.8252128793987712

(%o57) 1.462651745907181

Wszystkie cyfry się zgadzają.

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 2.

Zadanie jest podobne do poprzedniego. Zastosujmy rozwinięcie Taylora do obu funkcji podcałkowych.

```
→ taylor(%e^(−x^2),x,0,10);
  taylor(%e^(x^2),x,0,10);
```

(%o1)/T/ $1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}-\frac{x^{10}}{120}+...$

(%o2)/T/ $1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}+\frac{x^{10}}{120}+...$

Widać, że w tym przypadku nieparzyste składniki szeregu mają ujemne znaki, tzn. zerowy ma +, pierwszy -, drugi +, trzeci -, itd. Zatem przez analogię ćwiczenia 1, szereg przybliżający całkę będzie bardzo podobny - zamienamy 1 na (-1)^k.

```
→ n:10;
  I[n]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
  I[n−1]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
  abs(I[n]−I[n−1]),numer;
```

(n) 10

(I[n]) 0.7468241338237177

(%o5) 0.7468241207011848

(%o6) $1.312253294916133\ 10^{-8}$

```
→  n:12;
   I[n]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
   I[n−1]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
   abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)      12
(I[n])   0.7468241328180025
(%o38)   0.7468241327344955
(%o39)   8.350697910941562 10^−11
```

```
→  n:13;
   I[n]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
   I[n−1]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
   abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)      13
(I[n])   0.7468241328120547
(%o42)   0.7468241328180025
(%o43)   5.947797809824351 10^−12
```

```
→  n:14;
   I[n]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n),numer;
   I[n−1]:sum((−1)^k/((2·k+1)·k!),k,0,n−1),numer;
   abs(I[n]−I[n−1]),numer;
(n)      14
(I[n])   0.7468241328124503
(%o46)   0.7468241328120547
(%o47)   3.955724636739433 10^−13
```

Porównajmy to z wartością tej całki w Maximie.

```
→  integrate(%e^(−x^2),x,0,1),numer;
   rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
   rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
   rat: replaced 0.4213503964748574 by 58719406/139360035 = 0.4213503964748574
(%o23)   0.7468241328124269
```

Mamy 12 (a nawet 13) cyfr po przecinku takich samych.

```
(%i1)  kill(all);
(%o0)  done
```

Ćwiczenie 3.

Rozwijamy funkcję podcałkową w szereg potęgowy Taylora.

(%i1) n:15;

(n) 15

(%i2) f(x):=''(taylor(%e^x,x,0,n));

(%o2)/T/ $$f(x):=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^{10}}{3628800}+\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{12}}{479001600}+\frac{x^{13}}{6227020800}+\frac{x^{14}}{87178291200}+\frac{x^{15}}{1307674368000}+\ldots$$

Dostaliśmy wielomian stopnia n. Całkujemy go.

(%i3) F(x):=''(integrate(f(x),x));

(%o3) $$F(x):=\frac{x^{16}}{20922789888000}+\frac{x^{15}}{1307674368000}+\frac{x^{14}}{87178291200}+\frac{x^{13}}{6227020800}+\frac{x^{12}}{479001600}+\frac{x^{11}}{39916800}+\frac{x^{10}}{3628800}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x$$

Zapisujemy ten wielomian w postaci szeregu, mamy

(%i7)
```
n:10;
I[n]:sum(1/k!,k,1,n),numer;
I[n−1]:sum(1/k!,k,1,n−1),numer;
abs(I[n]−I[n−1]),numer;
```

(n) 10

(I[n]) 1.718281801146385

(%o6) 1.718281525573192

(%o7) $2.755731922654547\ 10^{-7}$

(%i11)
```
n:11;
I[n]:sum(1/k!,k,1,n),numer;
I[n−1]:sum(1/k!,k,1,n−1),numer;
abs(I[n]−I[n−1]),numer;
```

(n) 11

(I[n]) 1.718281826198493

(%o10) 1.718281801146385

(%o11) $2.505210838776861\ 10^{-8}$

(%i15)
```
n:12;
I[n]:sum(1/k!,k,1,n),numer;
I[n-1]:sum(1/k!,k,1,n-1),numer;
abs(I[n]-I[n-1]),numer;
```

(n) 12

(I[n]) 1.718281828286169

(%o14) 1.718281826198493

(%o15) $2.087675587958415\ 10^{-9}$

Porównajmy to z wartością tej całki w Maximie.

(%i16)
```
integrate(%e^x,x,0,1),numer;
```

rat: replaced 2.718281828459045 by 28245729/10391023 = 2.718281828459046

(%o16) 1.718281828459046

Mamy 8 (a nawet 9) cyfr po przecinku takich samych.

2 *Wzór trapezów*

(%i1)
```
kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 4.

Stosujemy złożony wzór trapezów (str. 7). Korzystając ze wzoru na błąd metody (str. 7) obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy a=1, b=2.

(%i2)
```
a:1;
b:2;
```

(a) 1

(b) 2

Definiujemy funkcję i obliczmy jej drugą pochodną.

(%i3)
```
f(x):=%e^(-x^2);
```

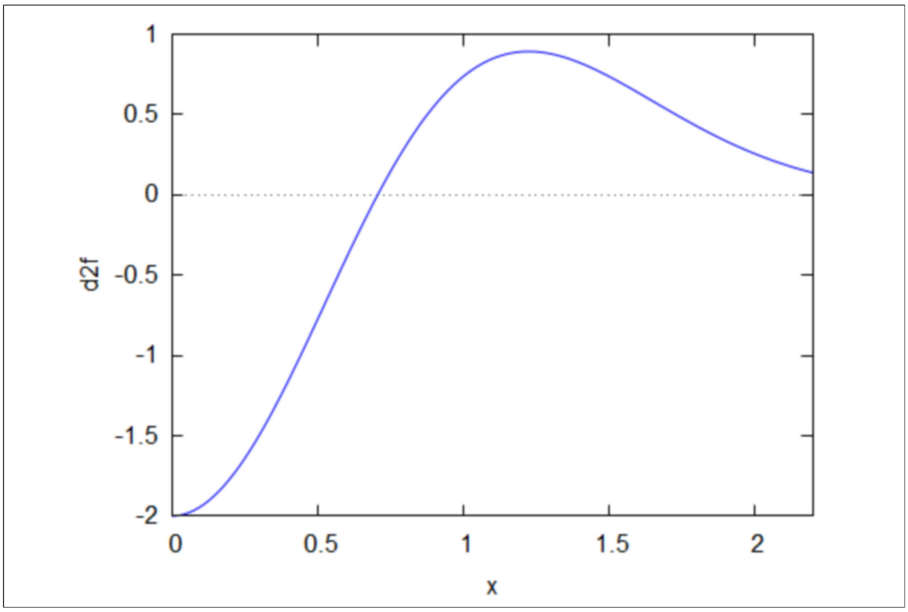
(%o3) $f(x):=\%e^{-x^2}$

(%i4)
```
d2f(x):=''(diff(f(x),x,2));
```

(%o4) $d2f(x):=4\,x^2\,\%e^{-x^2}-2\,\%e^{-x^2}$

Rysujemy wykres drugiej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5) wxplot2d([d2f], [x,0,2.2])$

(%t5) 

Widać, że na przedziale [1,1.5] druga pochodna ma maksimum. Znajdujemy to maksimum.

(%i6) solve(diff(d2f(x),x)=0);

(%o6) $[x=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},x=0]$

Przyjmujemy ksi=sqrt(3)/srt(2). Zatem błąd bezwzględny nie przekracza

(%i7) abs(−1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(sqrt(3)/sqrt(2)));

(%o7) $\frac{\%e^{-\frac{3}{2}}}{3\,n^2}$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-6. Musimy zatem rozwiązać nierówność.

(%i8) %e^(−3/2)/(3·n^2)<10^(−6);

(%o8) $\frac{\%e^{-\frac{3}{2}}}{3\,n^2}<\frac{1}{1000000}$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i9) solve(%e^(−3/2)/(3·n^2)=10^(−6));

(%o9) $[n=-\frac{1000\,\%e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{3}},n=\frac{1000\,\%e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{3}}]$

(%i10) %,numer;

(%o10) $[n=-272.7209563812004, n=272.7209563812004]$

Dodatnie rozwiązanie tego równania jest nastepujące:
n=272.7209563812004. Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

(%i11) n:273;

(n) 273

Daje to

(%i12) h:(b−a)/n;

(h) $\frac{1}{273}$

Zapisujemy wzór trapezów.

(%i13) I:h/2·(f(a)+2·sum(f(a+k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;

(I) 0.1352579987095421

W Maximie mamy możliwość porównać wyliczoną wartość z przybliżeniem tej całki w oparciu o algorytm wbudowany w program. Mamy

(%i14) integrate(f(x),x,1,2),numer;

rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
rat: replaced 0.4213503964748574 by 58719406/139360035 = 0.4213503964748574
rat: replaced 1.772453850905516 by 33316161/18796631 = 1.772453850905516
rat: replaced 0.4976611325094764 by 18371843/36916371 = 0.4976611325094766

(%o14) 0.1352572579499952

Uzyskaliśmy zakładaną dokładność do sześciu miejsc po przecinku.

(%i15) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 5.

Stosujemy złożony wzór trapezów i korzystając ze wzoru na błąd metody obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy przedział całkowania: a=0, b=%pi.

(%i2)
```
a:0;
b:%pi;
```
(a) 0

(b) π

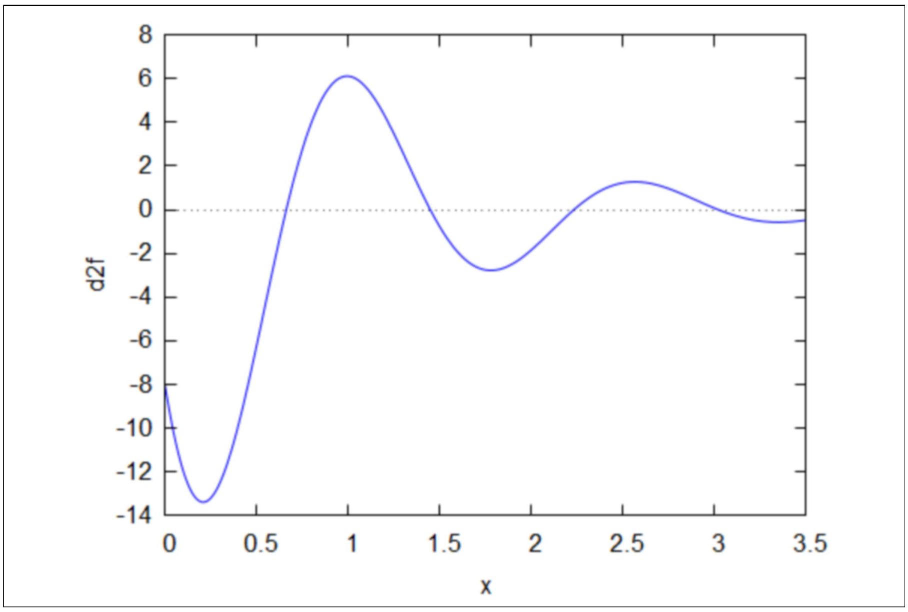
Definiujemy funkcję i obliczmy jej drugą pochodną.

(%i3)
```
f(x):=%e^(−x)·sin(4·x);
```
(%o3) $f(x):=\%e^{-x}\sin(4\,x)$

(%i4)
```
d2f(x):=''(diff(f(x),x,2));
```
(%o4) $d2f(x):=-15\,\%e^{-x}\sin(4\,x)-8\,\%e^{-x}\cos(4\,x)$

Rysujemy wykres drugiej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5)
```
wxplot2d([d2f], [x,0,3.5])$
```
(%t5)



Widać, że największą wartość, co do wartości bezwzględnej, druga pochodna osiąga w swoim pierszym minimum lokalnym w przedziale [0,0.5]. Znajdziemy to minumum.

(%i6)
```
solve(diff(d2f(x),x)=0);
```
(%o6) $\left[\sin(4\,x)=\frac{52\cos(4\,x)}{47}\right]$

Maxima nie rozwiąże nam tego dokładnie (symbolicznie). Spróbujmy znaleźć rozwiązanie przybliżone w przedziale [0,0.5].

(%i7)
```
s:find_root(diff(d2f(x),x),0,0.5);
```
(s) 0.208965084353576

Przyjmujemy ksi=s. Zatem błąd bezwzględny nie przekracza

(%i8) `abs(−1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(s));`

(%o8) $$\frac{1.115195023968963\,\pi^3}{n^2}$$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-7. Musimy zatem rozwiązać nierówność, żeby znaleźć n.

(%i10) `abs(−1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(s))<10^(−7);`

(%o10) $$\frac{1.115195023968963\,\pi^3}{n^2}<\frac{1}{10000000}$$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i11) `solve(abs(−1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(s))=10^(−7));`

rat: replaced 1.115195023968963 by 18391280/16491537 = 1.115195023968961

(%o11) $$[n=-\frac{20000\sqrt{459782}\,\pi^{3/2}}{3\sqrt{1832393}},n=\frac{20000\sqrt{459782}\,\pi^{3/2}}{3\sqrt{1832393}}]$$

(%i12) `%,numer;`

(%o12) $[n=-18595.17288590648,n=18595.17288590648]$

Dodatnie rozwiązanie tego równania jest nastepujące: n=18595.17288590648. Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

(%i13) `n:18596;`

(n) 18596

Daje to

(%i14) `h:(b−a)/n;`

(h) $$\frac{\pi}{18596}$$

Krok h jest liczbą niewymierną, więc bierzemy jej przybliżenie.

(%i15) `h:(b−a)/n,numer;`

(h) $1.689391618407073\ 10^{-4}$

Wyliczamy całkę ze wzoru trapezów.

```
(%i16) I:h/2·(f(a)+2·sum(f(a+k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;
(I)    0.2251261277767495
```

Porównajmy to z przybliżeniem w Maximie.

```
(%i17) integrate(f(x),x,a,b),numer;
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 3.141592653589793 by 80143857/25510582 = 3.141592653589793
rat: replaced 1.0 by 1/1 = 1.0
rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25
rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
rat: replaced 1.0 by 1/1 = 1.0
rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25
rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
rat: replaced 0.25 by 1/4 = 0.25
rat: replaced 0.05882352941176471 by 1/17 = 0.05882352941176471
rat: replaced -0.2352941176470588 by -4/17 = -0.2352941176470588
rat: replaced -0.01016798076794641 by -3185754/313312355 = -0.01016798076794641
(%o17) 0.2251261368791124
```

Mamy zadaną dokładność - 7 cyfr po przecinku jest takich samych.

```
(%i18) kill(all);
(%o0)  done
```

Ćwiczenie 6.

Stosujemy złożony wzór trapezów i korzystając ze wzoru na błąd metody obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy przedział całkowania: a=0, b=1.

```
(%i2) a:0;
      b:1;
(a)   0
(b)   1
```

Definiujemy funkcję i obliczmy jej drugą pochodną.

(%i3) f(x):=%e^(x);

(%o3) $f(x):=\%e^{x}$

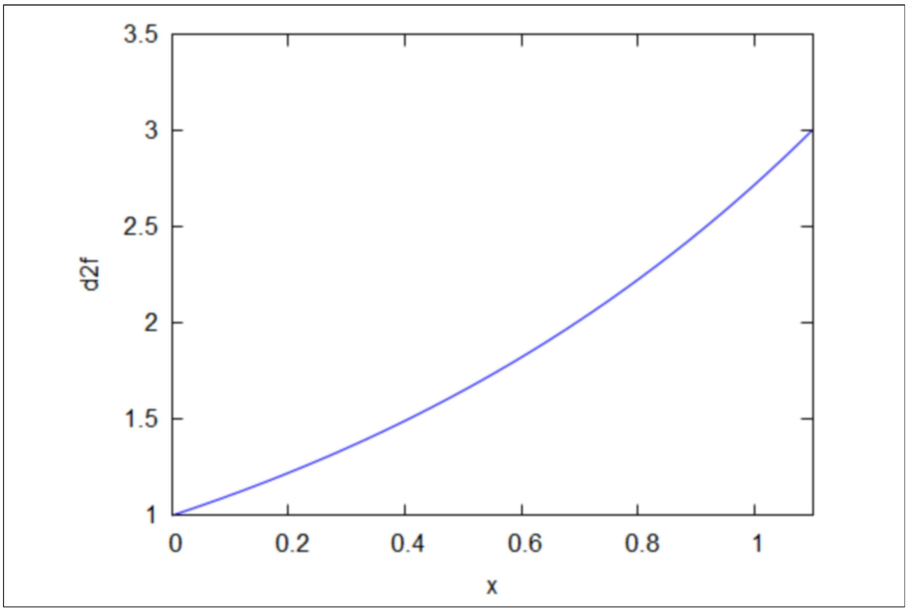
(%i4) d2f(x):=''(diff(f(x),x,2));

(%o4) $d2f(x):=\%e^{x}$

Rysujemy wykres drugiej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5) wxplot2d([d2f], [x,0,1.1])$

(%t5)



Widać, że największą wartość druga pochodna osiąga w x=1. Przyjmujemy ksi=1. Zatem błąd bezwzględny nie przekracza

(%i6) abs(−1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(1));

(%o6) $\frac{\%e}{12\, n^{2}}$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-8. Musimy zatem rozwiązać nierówność, żeby znaleźć n.

(%i7) 1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(1)<10^(−8);

(%o7) $\frac{\%e}{12\, n^{2}}<\frac{1}{100000000}$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i8) solve(1/(12·n^2)·(b−a)^3·d2f(1)=10^(−8));

(%o8) $[n=-\frac{5000\sqrt{\%e}}{\sqrt{3}},n=\frac{5000\sqrt{\%e}}{\sqrt{3}}]$

(%i9) %,numer;

(%o9) $[n=-4759.448347286905, n=4759.448347286905]$

Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

(%i10) n:4760;

(n) 4760

Daje to krok

(%i11) h:(b−a)/n;

(h) $\frac{1}{4760}$

Wyliczamy całkę ze wzoru trapezów.

(%i12) I:h/2·(f(a)+2·sum(f(a+k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;

(I) 1.718281834778786

(%i1) kill(all);

(%o0) *done*

3 Wzór Simpsona

Ćwiczenie 7.

Stosujemy złożony wzór Simpsona (str. 12). Korzystając ze wzoru na błąd metody (str. 12) obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy a=1, b=2.

(%i2) a:1;
b:2;

(a) 1

(b) 2

Definiujemy funkcję i obliczmy jej czwartą pochodną.

(%i3) f(x):=%e^(−x^2);

(%o3) $\mathrm{f}(x):=\%e^{-x^2}$

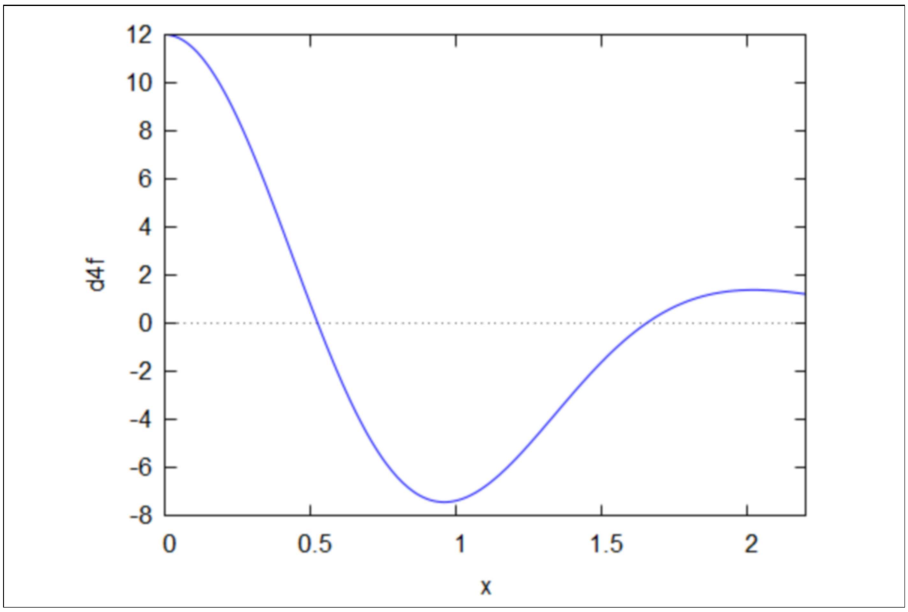
(%i4) d4f(x):=''(diff(f(x),x,4));

(%o4) $\mathrm{d4f}(x):=16\, x^4\, \%e^{-x^2}-48\, x^2\, \%e^{-x^2}+12\, \%e^{-x^2}$

Rysujemy wykres czwartej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5) wxplot2d([d4f], [x,0,2.2])$

(%t5)



Widaje się, że czwarta pochodna przyjmuje największą wartość w x=2. Sprawdzamy to

(%i6) solve(diff(d4f(x),x)=0);

(%o6) $\left[x=-\frac{\sqrt{\sqrt{10}+5}}{\sqrt{2}},x=\frac{\sqrt{\sqrt{10}+5}}{\sqrt{2}},x=-\frac{\sqrt{5-\sqrt{10}}}{\sqrt{2}},x=\frac{\sqrt{5-\sqrt{10}}}{\sqrt{2}},x=0\right]$

Jednak nie jest to 2. Zobaczmy przybliżenia.

(%i7) %,numer;

(%o7) $[x=-2.020182870456086,x=2.020182870456086,x=-0.9585724646138183,x=0.9585724646138183,x=0]$

Przyjmujemy ksi=2, bo wyliczone maksimum jest poza naszym przedziałem. Zatem błąd bezwzględny nie
przekracza

(%i8) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(2));

(%o8) $\frac{19\,\%e^{-4}}{720\,n^4}$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-6. Musimy zatem rozwiązać nierówność.

(%i9) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(2))<10^(−6);

(%o9) $\frac{19\,\%e^{-4}}{720\,n^4}<\frac{1}{1000000}$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i10) solve(abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(2))=10^(−6));

(%o10) $[n=\frac{5\sqrt{2}\,95^{1/4}\,\%e^{-1}\,\%i}{\sqrt{3}},n=-\frac{5\sqrt{2}\,95^{1/4}\,\%e^{-1}}{\sqrt{3}},n=-\frac{5\sqrt{2}\,95^{1/4}\,\%e^{-1}\,\%i}{\sqrt{3}},n=\frac{5\sqrt{2}\,95^{1/4}\,\%e^{-1}}{\sqrt{3}}]$

(%i11) %,numer;

(%o11) [n=4.688790130555601 %i,n=−4.688790130555601,n=−4.688790130555601 %i,n=4.688790130555601]

Dodatnie i rzeczywiste rozwiązanie tego równania jest nastepujące: n=4.688790130555601. Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

(%i12) n:5;

(n) 5

Daje to krok

(%i13) h:(b−a)/(2·n);

(h) $\frac{1}{10}$

Obliczamy całkę stosując wzór Simpsona.

(%i14) I:h/3·(f(a)+4·sum(f(a+(2·k−1)·h),k,1,n)+2·sum(f(a+2·k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;

(I) 0.135256035340046

(%i1) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 8.

Stosujemy złożony wzór Simpsona i korzystając ze wzoru na błąd metody obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy a=0, b=%pi.

(%i2) a:0;
b:%pi;

(a) 0

(b) π

Definiujemy funkcję i obliczmy jej czwartą pochodną.

(%i3) f(x):=%e^(−x)·sin(4·x);

(%o3) $f(x):=\%e^{-x}\sin(4\,x)$

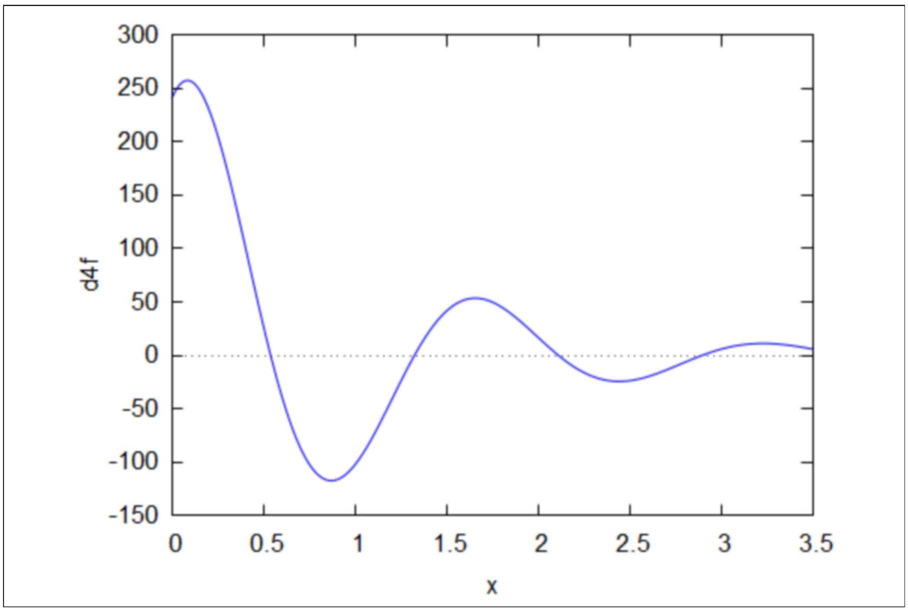
(%i4) d4f(x):=''(diff(f(x),x,4));

(%o4) $d4f(x):=161\,\%e^{-x}\sin(4\,x)+240\,\%e^{-x}\cos(4\,x)$

Rysujemy wykres czwartej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5) wxplot2d([d4f], [x,0,3.5])$

(%t5)



Największą wartość bezwględną czwarta pochodna na danym przedziale, osiąga w pierwszym swoim maksimum lokalnym. Wyliczamy to maksimum.

(%i6) solve(diff(d4f(x),x)=0);

(%o6) $\left[\sin(4\,x)=\frac{404\cos(4\,x)}{1121}\right]$

Musimy wyznaczyć przybliżenie rozwiązania. Wiemy, że jest w przedziale [0,0.5].

(%i8) s:find_root(diff(d4f(x),x),x,0,0.5);

(s) 0.08647575279014397

Przyjmujemy ksi=s. Zatem błąd bezwględny nie przekracza

(%i9) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(s));

(%o9) $$\frac{0.08928632407218302\,\pi^5}{n^4}$$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-7. Musimy zatem rozwiązać nierówność.

(%i10) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(s))<10^(−7);

(%o10) $$\frac{0.08928632407218302\,\pi^5}{n^4} < \frac{1}{10000000}$$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i11) solve(abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(s))=10^(−7));

rat: replaced 0.08928632407218302 by 16475121/184520095 = 0.08928632407218304

(%o11) $$\left[n=\frac{2\sqrt{3}\,5^{3/2}\,14644552^{1/4}\,\pi^{5/4}\,\%i}{36904019^{1/4}}, n=-\frac{2\sqrt{3}\,5^{3/2}\,14644552^{1/4}\,\pi^{5/4}}{36904019^{1/4}}, n=-\frac{2\sqrt{3}\,5^{3/2}\,14644552^{1/4}\,\pi^{5/4}\,\%i}{36904019^{1/4}}, n=\frac{2\sqrt{3}\,5^{3/2}\,14644552^{1/4}\,\pi^{5/4}}{36904019^{1/4}}\right]$$

(%i12) %,numer;

(%o12) $[n=128.5682038608714\,\%i, n=-128.5682038608714, n=-128.5682038608714\,\%i, n=128.5682038608714]$

Dodatnie i rzeczywiste rozwiązanie tego równania jest nastepujące: n=128.5682038608714. Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

(%i13) n:129;

(n) 129

Daje to krok

(%i14) h:(b−a)/(2·n);

(h) $$\frac{\pi}{258}$$

Bierzemy wartość przybliżoną kroku h:

(%i15) h:(b−a)/(2·n),numer;

(h) 0.01217671571158834

Obliczamy całkę stosując wzór Simpsona.

```
(%i16) I:h/3·(f(a)+4·sum(f(a+(2·k−1)·h),k,1,n)+2·sum(f(a+2·k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;
(I)    0.2251261429566255
```

```
(%i19) kill(all);
(%o0)  done
```

Ćwiczenie 9.

Stosujemy złożony wzór Simpsona (str. 12). Korzystając ze wzoru na błąd metody (str. 12) obliczamy ile potrzebujemy węzłów do osiągnięcia zadanej dokładności.

Mamy a=0, b=1.

```
(%i2)  a:0;
       b:1;
(a)    0
(b)    1
```

Definiujemy funkcję i obliczmy jej czwartą pochodną.

```
(%i3)  f(x):=%e^(x);
```

(%o3) $f(x):=\%e^{x}$

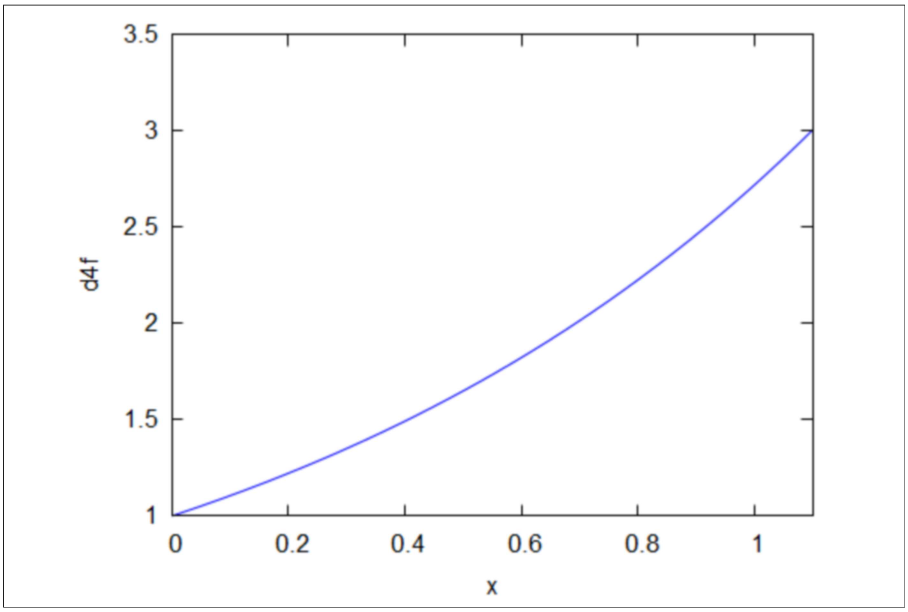
```
(%i4)  d4f(x):=''(diff(f(x),x,4));
```

(%o4) $d4f(x):=\%e^{x}$

Rysujemy wykres czwartej pochodnej, aby dobrać ksi.

(%i5) wxplot2d([d4f], [x,0,1.1])$

(%t5)



Widaje się, że czwarta pochodna przyjmuje największą wartość w x=1.

Przyjmujemy ksi=1. Zatem błąd bezwzględny nie przekracza

(%i6) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(1));

(%o6) $\frac{\%e}{2880\, n^{4}}$

Chcemy, żeby błąd nie przekraczał 10^-8. Musimy zatem rozwiązać nierówność.

(%i7) abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(1))<10^(−8);

(%o7) $\frac{\%e}{2880\, n^{4}} < \frac{1}{100000000}$

Pomocniczo rozwiążmy równanie.

(%i8) solve(abs(−1/(2880·n^4)·(b−a)^5·d4f(1))=10^(−8));

(%o8) $[n=\frac{5\sqrt{2}\, 125^{1/4}\, \%e^{1/4}\, \%i}{\sqrt{3}}, n=-\frac{5\sqrt{2}\, 125^{1/4}\, \%e^{1/4}}{\sqrt{3}}, n=-\frac{5\sqrt{2}\, 125^{1/4}\, \%e^{1/4}\, \%i}{\sqrt{3}}, n=\frac{5\sqrt{2}\, 125^{1/4}\, \%e^{1/4}}{\sqrt{3}}]$

(%i9) %,numer;

(%o9) $[n=17.52772289173953\, \%i, n=-17.52772289173953, n=-17.52772289173953\, \%i, n=17.52772289173953]$

Dodatnie i rzeczywiste rozwiązanie tego równania jest nastepujące: n=17.52772289173953. Przyjmujemy za n pierwszą liczbę naturalną większą od wyliczonej, tzn.

```
(%i10) n:18;
(n)    18
```

Daje to krok

```
(%i11) h:(b−a)/(2·n);
```

(h) $\frac{1}{36}$

Obliczamy całkę stosując wzór Simpsona.

```
(%i12) I:h/3·(f(a)+4·sum(f(a+(2·k−1)·h),k,1,n)+2·sum(f(a+2·k·h),k,1,n−1)+f(b)),numer;
(I)    1.718281834141971
```

```
→ kill(all);
```