Funkcje liczbowe

Wykład

- Podstawowe określenia
- Funkcje okresowe, parzyste i nieparzyste
- Funkcje monotoniczne, złożenia funkcji
- Funkcje odwrotne, cyklometryczne
- Funkcje elementarne

Definicja 1. (*funkcja*)
Funkcją określoną na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze $Y \subset \mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. Funkcję taką oznaczamy przez $f : X \longrightarrow Y$. Wartość funkcji f w punkcie x oznaczamy przez $f(x)$.

Definicja 2. (*dziedzina, przeciwdziedzina, zbiór wartości funkcji*)
Niech $f : X \longrightarrow Y$. Wtedy zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i oznaczamy przez D_f, a zbiór Y nazywamy jej przeciwdziedziną. Ponadto zbiór

$$\left\{ f(x) \in Y : x \in D_f \right\}$$

nazywamy zbiorem wartości funkcji f i oznaczamy przez W_f.

Ćwiczenie 1. *Określić dziedziny oraz zbiory wartości funkcji:*

a) $f(x) = \log(x^2 - 1)$;

b) $g(x) = \operatorname{ctg} \pi x$;

c) $h(x) = 1 + \sqrt{\sin x}$;

d) $l(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$;

e) $m(x) = \dfrac{-1}{x^2 + 1}$.

Definicja 3. (*wykres funkcji*)
Wykresem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ nazywamy zbiór

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X, y = f(x)\Big\}.$$

Uwaga 1. Podzbiór płaszczyzny XOY jest wykresem pewnej funkcji zmiennej x, gdy każda pionowa prosta przecina go co najwyżej w jednym punkcie.

Rysunek 1. *Wykres funkcji.*

Rysunek 2. *Zbiór* Γ *nie jest wykresem funkcji.*

Definicja 4. (*funkcja „na”*)
Funkcja f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X} \quad f(x) = y.$$

Uwaga 2. Funkcja jest „na”, gdy jej zbiór wartości pokrywa się z jej przeciwdziedziną.

Przykład 1. *Przykładami funkcji $f : X \longrightarrow Y$ odwzorowujących zbiór X na zbiór Y są:*
a) $f(x) = \sin x$ *dla* $X = [0, 2\pi)$ *i* $Y = [-1, 1]$*;*
b) $g(x) = x^2$ *dla* $X = \mathbb{R}$ *i* $Y = [0, \infty)$*.*

Definicja 5. (*funkcja okresowa*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest okresowa, jeżeli

$$\exists_{T>0} \forall_{x \in X} \quad f(x+T) = f(x).$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f.

Uwaga 3. Funkcja jest okresowa, gdy jej wykres po przesunięciu o wektor $\vec{v} = [T, 0]$ nałoży się na siebie.

Rysunek 3. *Wykres funkcji $y = \sin x$ oraz funkcji $y = \cos x$.*

Definicja 6. (*funkcja parzysta*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest parzysta, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad f(-x) = f(x).$$

Uwaga 4. Funkcja jest parzysta, gdy jej wykres jest symetryczny względem osi OY

Rysunek 4. *Wykres funkcji* $y = x^2$*.*

Definicja 7. (*funkcja nieparzysta*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest nieparzysta, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \quad f(-x) = -f(x).$$

Uwaga 5. Funkcja jest nieparzysta, gdy jej wykres jest symetryczny względem środka układu współrzędnych.

Rysunek 5. *Wykres funkcji* $y = \tan x$ *dla* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Rysunek 6. *Wykres funkcji* $y = x^3$.

Definicja 8. (*funkcja ograniczona*)
Funkcja f jest ograniczona na zbiorze $A \subset D_f$, jeżeli zbiór jej wartości jest ograniczony na tym zbiorze, tzn.

$$\exists_{m,M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in A} \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Uwaga 6. Funkcja jest ograniczona, gdy jej wykres jest położony między dwiema prostymi poziomymi.

Rysunek 7. *Wykres funkcji* $y = \tan x$ *dla* $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

Definicja 9. (*funkcja rosnąca*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest rosnąca na zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2 \in A} \quad \Big[(x_1 < x_2) \Rightarrow \Big(f(x_1) < f(x_2)\Big)\Big].$$

Uwaga 7. Funkcja jest rosnąca, gdy wraz ze wzrostem argumentów rosną jej wartości, tzn. gdy poruszając się w prawo po jej wykresie wznosimy się do góry.

Rysunek 8. *Wykres funkcji* $y = e^x$*.*

Definicja 10. (*funkcja malejąca*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest malejąca na zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \quad \Big[(x_1 < x_2) \Rightarrow \Big(f(x_1) > f(x_2)\Big)\Big].$$

Uwaga 8. Funkcja jest malejąca, gdy wraz ze wzrostem argumentów maleją jej wartości, tzn. gdy poruszając się w prawo po jej wykresie opadamy w dół.

Rysunek 9. *Wykres funkcji* $y = \dfrac{1}{x}$ *dla* $x > 0$.

Definicja 11. (*funkcja monotoniczna*)
Mówimy, że funkcja jest monotoniczna na zbiorze A, jeżeli jest rosnąca lub malejąca na tym zbiorze.

Definicja 12. (*funkcja złożona*)
Złożeniem funkcji $f : X \longrightarrow Y$ i $g : Y \longrightarrow Z$ nazywamy funkcję $f \circ g : X \longrightarrow Z$ określoną wzorem:

$$(f \circ g)(x) := g\Big(f(x)\Big) \qquad \text{dla} \quad x \in X.$$

Ćwiczenie 2. *Określić funkcje złożone* $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ *oraz ich dziedziny, jeżeli:*
a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
b) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \cos x$.

Definicja 13. (*funkcja różnowartościowa*)
Funkcja $f : X \longrightarrow R$ jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset X$, jeżeli

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad \Big[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow \Big(f(x_1) \neq f(x_2)\Big)\Big].$$

Uwaga 9. Funkcja jest różnowartościowa, gdy różnym argumentom odpowiadają różne wartości. Przy sprawdzaniu różnowartościowości funkcji wygodnie jest korzystać z definicji równoważnej:

$$\forall_{x_1,x_2\in A} \quad \Big[\Big(f(x_1) = f(x_2)\Big) \Rightarrow (x_1 = x_2)\Big].$$

Ćwiczenie 3. *Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:*
a) $f(x) = x^3 + 1$, $\mathbb{R}$; *b)* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$.

Definicja 14. (*funkcja odwrotna*)
Niech funkcja $f : X \longrightarrow Y$ będzie „na” i różnowartościowa. Funkcją odwrotną do f nazywamy funkcję $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ określoną przez warunek:

$$f^{-1}(y) := x \Leftrightarrow y = f(x), \qquad \text{gdzie } x \in X, y \in Y.$$

Uwaga 10. Wykres funkcji odwrotnej f^{-1} otrzymujemy z wykresu funkcji f odbijając go symetrycznie względem prostej $y = x$ oraz zamieniając między sobą jednocześnie nazwy osi $x \longleftrightarrow y$.

Ćwiczenie 4. *Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:*
a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \in [2, \infty)$;
b) $g(x) = 2 - \sqrt{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Definicja 15. (*funkcje cyklometryczne*)
1. Funkcja $y = \arcsin x$ (czyt. arkus sinus) jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \sin x$ obciętej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dziedziną funkcji $y = \arcsin x$ jest przedział $[-1, 1]$.

Rysunek 10. *Arcus sinus.*

2. Funkcja $y = \arccos x$ (czyt. arkus kosinus) jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \cos x$ obciętej do przedziału $[0, \pi]$. Dziedziną funkcji $y = \arccos x$ jest przedział $[-1, 1]$.

Rysunek 11. *Arcus kosinus.*

3. Funkcja $y = \arctan x$ (czyt. arkus tangens) jest funkcją odwrotną do funkcji $y = \tan x$ obciętej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Dziedziną funkcji $y = \arctan x$ jest $\mathbb{R}$.

Rysunek 12. *Arcus tangens.*

4. Funkcja y=arcctg$x$ (czyt. arkus kotangens) jest funkcją odwrotną do funkcji y=ctg$x$ obciętej do przedziału $(0, \pi)$.
Dziedziną funkcji y=arcctg$x$ jest $\mathbb{R}$.

Rysunek 13. *Arcus kotangens.*

Definicja 16. (*funkcje elementarne*)
Funkcjami elementarnymi nazywamy funkcje: stałe, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne i cyklometryczne oraz ich złożenia.

Twierdzenie 1. *(*o ciągłości funkcji elementarnych*)*
Funkcje elementarne są ciągłe w swoich dziedzinach.

Definicja 17. (*funkcja stała*)
Funkcją stałą nazywamy funkcję daną wzorem:

$$f(x) = c \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą.

Rysunek 14. *Funkcja stała.*

Definicja 18. (*wartość bezwzględna*)
Wartością bezwzględną nazywamy funkcję $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ określoną wzorem:

$$|x| := \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Rysunek 15. *Wartość bezwzględna.*

Definicja 19. (*funkcja potęgowa*)
Funkcją potęgową nazywamy funkcję daną wzorem:

$$f(x) = x^n \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie n jest ustaloną liczbą naturalną, lub wzorem:

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, n \in \mathbb{N}.$$

Uwaga 11. Zachodzi następujący warunek:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Definicja 20. (*wielomian*)
Wielomianem nazywamy funkcję $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $a_i \in \mathbb{R}$ dla $0 \leqslant i \leqslant n$, przy czym $a_n \neq 0$. Liczbę n nazywamy stopniem wielomianu W.

Przykład 2. *Funkcje* $W_1(x) = 3$, $W_2(x) = -4x^3 + x^2 - 3x + 5$, $W_3(x) = 1 - x^{100}$ *są wielomianami.*

Definicja 21. (*funkcja wymierna*)
Funkcję, którą można zapisać w postaci ilorazu dwóch wielomianów, nazywamy funkcją wymierną.

Przykład 3. *Funkcje wymierne:*

$$f(x) = \frac{x^9}{x^8 - x^6 - 1}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^3 - 2x - 10}.$$

Definicja 22. (*funkcja wykładnicza*)
Funkcję postaci: $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, nazywamy funkcją wykładniczą.

Definicja 23. (*funkcja logarytmiczna*)
Funkcję postaci: $f(x) = \log_a x$, $x \in \mathbb{R}_+$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, nazywamy funkcją logarytmiczną.

Uwaga 12. Jeżeli $a \in (0, 1)$, to funkcje wykładnicza i logarytmiczna są funkcjami malejącymi, natomiast dla $a \in (1, \infty)$ są funkcjami rosnącymi.

Rysunek 16. *Funkcja wykładnicza.*

Rysunek 17. *Funkcja logarytmiczna.*

Definicja 24. (*funkcja eksponencjalna*)
Funkcję wykładniczą o podstawie e nazywamy funkcją eksponencjalną i oznaczamy również: $\exp x := e^x$ (czyt. eksponens).

Definicja 25. (*logarytm naturalny*)
Logarytm o podstawie równej liczbie e nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy: $\ln x := \log_e x$.

Rysunek 18. *Funkcja eksponencjalna i logarytm naturalny.*