Geometria analityczna w przestrzeni I

Wykład

- Wektory
- Iloczyn skalarny
- Iloczyn wektorowy
- Iloczyn mieszany

Definicja 1. (*przestrzeń* $\mathbb{R}^3$)
Przestrzenią $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych, tzn.

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definicja 2. (*punkty współliniowe*)
Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty.

Definicja 3. (*punkty współpłaszczyznowe*)
Mówimy, że punkty D, E, F, G przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty.

Rysunek 1. *Punkty współliniowe i współpłaszczyznowe.*

Twierdzenie 1. *(*współrzędne środka odcinka*)*
Współrzędne punktu S dzielącego odcinek AB na połowy wyrażają się wzorem :

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad s_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}, \quad s_3 = \frac{a_3 + b_3}{2},$$

gdzie $A = (a_1, a_2, a_3)$ i $B = (b_1, b_2, b_3)$.

Ćwiczenie 1. *Niech $A = (-1, 2, 5)$ oraz $B = (1, 10, -7)$. Obliczyć współrzędne środka odcinka AB.*

Definicja 4. (*wektor zaczepiony*)
Wektorem zaczepionym $\overrightarrow{AB}$ nazywamy wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B. Jeżeli $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, wówczas

$$\overrightarrow{AB} = [b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3].$$

Definicja 5. (*wektor swobodny*)
Wektorem swobodnym $\vec{u}$ nazywamy zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}$.

Rysunek 2. *Wektory zaczepione i swobodne.*

Definicja 6. (*działania na wektorach*)
Niech dane będą wektory $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$.
Sumę wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} := [a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3].$$

Różnicę wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} := [a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3].$$

Iloczyn wektora $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ przez liczbę $\alpha \in \mathbb{R}$ określamy wzorem:

$$\alpha \overrightarrow{a} := [\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3].$$

Rysunek 3. *Suma i różnica wektorów.*

Rysunek 4. *Iloczyn wektora przez liczbę.*

Twierdzenie 2. *(*warunek równoległości wektorów*)*
Wektory $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *i* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Definicja 7. (*wektory współpłaszczyznowe*)
Mówimy, że wektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory.

Twierdzenie 3. *(*warunek współpłaszczyznowości wektorów*)*
Wektory $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *i* $\overrightarrow{c} = [c_1, c_2, c_3]$ *są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Definicja 8. (*kartezjański* układ współrzędnych w przestrzeni*)
Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone, wzajemnie prostopadłe proste zwane osiami, przecinające się w jednym punkcie zwanym początkiem układu.

*René Descartes (1596-1650) - matematyk i filozof francuski

Definicja 9. (*orientacja układu współrzędnych*)
W zależności od wzajemnego położenia osi układu współrzędnych wyróżniamy dwie jego orientacje: układ prawoskrętny i układ lewoskrętny.

Uwaga 1. Jeżeli kciuk prawej ręki umieścimy tak, aby wskazywał zwrot osi x prawoskrętnego układu współrzędnych, to palce wskazujący i serdeczny wskażą odpowiednio osie y i z. Podobną interpretację ma układ lewoskrętny.

Definicja 10. (*wersory osi układu współrzędnych*)
Wektory $\overrightarrow{i} = [1,0,0]$, $\overrightarrow{j} = [0,1,0]$, $\overrightarrow{k} = [0,0,1]$ nazywamy wersorami odpowiednio na osiach x, y i z.

Rysunek 5. *Wersory osi układu współrzędnych.*

Definicja 11. (*długość wektora*)
Długość wektora $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ jest określona wzorem:

$$|\overrightarrow{a}| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Ćwiczenie 2. *Obliczyć długości podanych wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-3, 0, 4]$*;*
b) $\overrightarrow{v} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31}]$*,*
c) $\overrightarrow{AB}$*, gdzie* $A = (2, 1, -3)$*,* $B = (-1, 1, 4)$*.*

Definicja 12. (*iloczyn skalarny*)
Niech $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ będą dowolnymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ określamy wzorem:

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} := \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Twierdzenie 4. *(*warunek konieczny prostopadłości wektorów*)*
Jeżeli wektory $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ są prostopadłe, to wówczas

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = 0.$$

Twierdzenie 5. *(*wzór do obliczania iloczynu skalarnego*)*
Niech $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *i* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$*.*
Wtedy

$$\overrightarrow{a} \circ \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Ćwiczenie 3. *Obliczyć iloczyn skalarny podanych wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, -3]$, $\overrightarrow{v} = [2, 0, -1]$;
b) $\overrightarrow{u} = [\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$, $\overrightarrow{v} = [\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0]$.

Ćwiczenie 4. *Obliczyć kąt między podanymi wektorami:*
a) $\overrightarrow{u} = [3, -1, 2]$, $\overrightarrow{v} = [4, 2, -5]$;
b) $\overrightarrow{u} = [3, -1, 2]$, $\overrightarrow{v} = [1, 2, 3]$.

Definicja 13. (*orientacja trójki wektorów*)
Niech $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ i $\overrightarrow{c} = [c_1, c_2, c_3]$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0.$$

W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny mówimy, że orientacja układu wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych.

Definicja 14. (*iloczyn wektorowy*)
Niech $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ będą niewspółliniowymi wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ nazywamy wektor $\overrightarrow{c}$, który spełnia warunki:
1. jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$;
2. jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, tzn.:

$$\left|\overrightarrow{c}\right| = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \sin\varphi,$$

gdzie φ jest kątem między wektorami $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$,
3. orientacja trójki wektorów $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych.
Iloczyn wektorowy pary wektorów $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ oznaczamy przez $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

Twierdzenie 6. *(*wzór do obliczania iloczynu wektorowego*)* *Niech* $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$ *oraz* $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$*. Wtedy*

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

gdzie $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ *oznaczają wersory odpowiednio na osiach* x, y *i* z*.*

Ćwiczenie 5. *Obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:*
a) $\overrightarrow{u} = [-1, 2, 5]$, $\overrightarrow{v} = [2, 0, -3]$;
b) $\overrightarrow{u} = [-1, -3, 4]$, $\overrightarrow{v} = [5, 6, -2]$.

Ćwiczenie 6. *Obliczyć pola podanych obszarów:*
a) równoległobok rozpięty na wektorach $\overrightarrow{u} = [0, 3, -2]$, $\overrightarrow{v} = [-1, 2, 5]$;
b) trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$.

Definicja 15. (*iloczyn mieszany*)
Niech $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ będą wektorami w $\mathbb{R}^3$. Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ określony jest wzorem:

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) := (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \circ \overrightarrow{c}.$$

Uwaga 2. Wartość bezwzględna iloczynu mieszanego wektorów $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ jest równa objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$, tzn.

$$|V| = \left|(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})\right|.$$

Rysunek 6. *Równoległościan rozpięty na trzech wektorach.*

Twierdzenie 7. *(*wzór do obliczania iloczynu mieszanego*)* *Niech* $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *i* $\overrightarrow{c} = [c_1, c_2, c_3]$ *będą wektorami w* $\mathbb{R}^3$. *Wtedy*

$$(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ćwiczenie 7. *Obliczyć objętości podanych brył:*
a) równoległościan rozpięty na wektorach: $\overrightarrow{u} = [1, -1, 2]$, $\overrightarrow{v} = [0, 3, -2]$, $\overrightarrow{w} = [-1, 5, 0]$;
b) czworościan o wierzchołkach: $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$.

Ćwiczenie 8. *Zbadać, czy wektory* $\overrightarrow{u} = [1, 2, 3]$, $\overrightarrow{v} = [-1, 0, 4]$, $\overrightarrow{w} = [0, -2, 6]$ *są współpłaszczyznowe.*

Ćwiczenie 9. *Zbadać, czy punkty* $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ *leżą w jednej płaszczyźnie.*