Granica i ciągłość funkcji zmiennej rzeczywistej

Wykład nr 9 (Inżynieria sanitarna)

- Podstawowe określenia
- Twierdzenia o granicach właściwych i niewłaściwych funkcji
- Asymptoty funkcji
- Ciągłość funkcji

Definicja 1. (*Heinego* granicy właściwej funkcji w punkcie*)
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą g, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyraz ze zbioru $D_f \setminus \{x_0\}$ i zbieżnego do punktu x_0 ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do punktu g, tzn.

$$\forall_{x_n \subset D_f \setminus \{x_0\}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna granicy funkcji w punkcie.*

*Eduard Heinrich Heine (1821-1881) - matematyk niemiecki.

Definicja 2. (*Heinego granicy właściwej lewostronnej funkcji w punkcie*)
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą lewostronną g, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyraz ze zbioru $D_f \setminus \{x_0\}$ i takich, że $x_n < x_0$, zbieżnego do punktu x_0 ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do punktu g, tzn.

$$\forall_{x_n \subset D_f \setminus \{x_0\}, x_n < x_0} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

Definicja 3. (*Heinego granicy właściwej prawostronnej funkcji w punkcie*)
Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą prawostronną g, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ciągu (x_n) o wyraz ze zbioru $D_f \setminus \{x_0\}$ i takich, że $x_n > x_0$, zbieżnego do punktu x_0 ciąg $(f(x_n))$ jest zbieżny do punktu g, tzn.

$$\forall_{x_n \subset D_f \setminus \{x_0\}, x_n > x_0} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

Rysunek 2. *Interpretacja geometryczna granic jednostronnych funkcji w punkcie.*

Definicja 4. (*Heinego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie*) Mówimy, że funkcja f ma w punkcie x_0 granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_n \subset D_f \setminus \{x_0\}} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \infty \right) \right].$$

Rysunek 3. *Interpretacja geometryczna granicy niewłaściwej funkcji w punkcie.*

Twierdzenie 1. *(*warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy*)*
Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Definicja 5. (*Heinego granicy właściwej funkcji w nieskończoności*)
Mówimy, że funkcja f ma w ∞ granicę właściwą g, co zapisujemy:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_n \subset D_f} \left[\left(\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \right) \Longrightarrow \left(\lim_{n \to \infty} f(x_n) = g \right) \right].$$

Uwaga 1. W analogiczny sposób określa się granicę właściwą funkcji w $-\infty$.

Rysunek 4. *Interpretacja geometryczna granicy właściwej funkcji w nieskończoności.*

Definicja 6. (*Heinego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności*)
Mówimy, że funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞, co zapisujemy:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{x_n \subset D_f} \left[\left(\lim_{n\to\infty} x_n = \infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \infty\right)\right].$$

Uwaga 2. W analogiczny sposób określa się granicę niewłaściwą funkcji w $-\infty$.

Rysunek 5. *Interpretacja geometryczna granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności.*

Twierdzenie 2. *(*o arytmetyce granic funkcji*)*

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$,

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, *o ile* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$,

5. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Uwaga 3. Powyższe twierdzenia są prawdziwe także dla granic jednostronnych funkcji w punkcie x_0 oraz dla granic w $-\infty$ i ∞.

Ćwiczenie 1. *Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic oblicz:*

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$;

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 \cdot 5^x - 2^x}{3^x - 4 \cdot 5^x}$;

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$.

Twierdzenie 3. *(*o granicy funkcji złożonej*)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:
1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$,
2. $f(x) \neq y_0$ *dla każdego* $x \in D_f \setminus \{x_0\}$,
3. $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = q$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = q$.

Uwaga 4. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych typów granic.

Ćwiczenie 2. *Korzystając z twierdzenia o granicy funkcji złożonej oblicz:*
a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{\sin x}$; *b)* $\lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{1}{x}}$; *c)* $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{arctan} \dfrac{1}{x}$.

Twierdzenie 4. *(*o trzech funkcjach*)*
Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *dla każdego* $x \in D_f \setminus \{x_0\}$,
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$,

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$.

Uwaga 5. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic właściwych jednostronnych oraz dla granic właściwych w nieskończoności.

Ćwiczenie 3. *Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach oblicz:*
a) $\lim\limits_{x \to 0} x^2(2 + \cos \frac{1}{x})$; *b)* $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \sin x$.

Twierdzenie 5. *(*o dwóch funkcjach*)*
Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:

1. $f(x) \leqslant g(x)$ *dla każdego* $x \in D_f \setminus \{x_0\}$*,*
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$*,*

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$*.*

Uwaga 6. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla pozostałych typów granic.

Ćwiczenie 4. *Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach oblicz:*

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2 + \cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}$*;* *b)* $\lim\limits_{x \to \infty} (\sin x - e^x)$*.*

Twierdzenie 6. *(o granicach niewłaściwych funkcji)*

$p + \infty = \infty$	$p \cdot \infty = \infty$
$\frac{p}{\infty} = 0$	$\frac{p}{0^+} = \infty$
$p^\infty = 0$ *dla* $0^+ \leqslant p < 1$	$p^\infty = \infty$ *dla* $p > 1$
$\infty^q = 0$ *dla* $q < 0$	$\infty^q = \infty$ *dla* $q > 0$

Uwaga 7. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu odpowiednich twierdzeń.

Ćwiczenie 5. *Oblicz:*

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1} + \ln \frac{1}{x - 1} \right)$; *b)* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}$.

Definicja 7. (*wyrażenia nieoznaczone*)
Symbole:

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\dfrac{0}{0}$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	1^{∞}	∞^{0}	0^{0}

nazywamy wyrażeniami nieoznaczonymi. Ich wartości zależą od postaci funkcji je tworzących. Zilustrujemy to na przykładzie nieoznaczoności $0 \cdot \infty$.

Przykład 1. *Weźmy funkcje f i g spełniające warunki:* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$. *Wtedy granica* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ *przyjmuje różne wartości albo nie istnieje.*

a) Niech $f(x) = x$ *oraz* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. *Wtedy* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ *- nie istnieje.*

b) Niech $f(x) = px^2$ *oraz* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, *gdzie* $p \in \mathbb{R}$. *Wtedy* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = p$.

c) Niech $f(x) = x^2$ *oraz* $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$. *Wtedy* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \infty$.

d) Niech $f(x) = -x^2$ *oraz* $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$. *Wtedy* $\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = -\infty$.

Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = \dfrac{1}{e}$
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$

Ćwiczenie 6. *Oblicz podane granice:*

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{\sin 5x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$.

Definicja 8. (*asymptota pionowa lewostronna i prawostronna*)
Prostą $x = a$ nazywamy asymptotą pionową lewostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Prostą $x = a$ nazywamy asymptotą pionową prawostronną funkcji f, jeżeli

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

Rysunek 6. *Asymptota pionowa lewostronna.*

Rysunek 7. *Asymptota pionowa prawostronna.*

Definicja 9. (*asymptota pionowa obustronna*)
Prostą $x = a$ nazywamy asymptotą pionową obustronną funkcji, jeżeli jest jednocześnie jej asymptotą lewostronną i prawostronną.

Twierdzenie 7. *(*o lokalizacji asymptot pionowych funkcji*)*
Funkcja elementarna może mieć asymptoty pionowe jedynie w skończonych krańcach dziedziny, które do niej nie należą.

Definicja 10. (*asymptota ukośna funkcji*)
Prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$ jeżeli spełniony jest warunek:

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ jeżeli spełniony jest warunek:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0.$$

Uwaga 8. Jeżeli współczynnik $a = 0$, to asymptotę ukośną nazywamy poziomą.

Twierdzenie 8. *(*warunek istnienia asymptoty ukośnej*)*
Prosta $y = ax + b$ *jest asymptotą ukośną funkcji* f *w* $+\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \textit{i} \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]\,.$$

Prosta $y = ax + b$ *jest asymptotą ukośną funkcji* f *w* $-\infty$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \textit{i} \qquad b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - ax]\,.$$

Ćwiczenie 7. *Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:*

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - 4}$;

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Definicja 11. (*funkcja ciągła w punkcie*)
Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Uwaga 9. Funkcja jest ciągła w punkcie, gdy jej wykres nie „przerywa" się w tym punkcie.

Rysunek 8. *Funkcja ciągła w punkcie.*

Rysunek 9. *Funkcja nieciągła w punkcie.*

Definicja 12. (*funkcja ciągła na zbiorze*)
Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Uwaga 10. Funkcja jest ciągła na zbiorze, gdy jej wykres można narysować bez odrywania ręki od rysunku.

Definicja 13. (*nieciągłość funkcji*)
Funkcja f jest nieciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ albo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Twierdzenie 9. *(*o ciągłości sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu*)*
Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie x_0, to
1. funkcja $f \pm g$ jest ciągła w punkcie x_0;
2. funkcja $f \cdot g$ jest ciągła w punkcie x_0;
3. funkcja $\dfrac{f}{g}$ jest ciągła w punkcie x_0, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Twierdzenie 10. *(*o ciągłości funkcji złożonej*)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i funkcja g jest ciągła w punkcie $y_0 = f(x_0)$, to funkcja złożona $g \circ f$ jest ciągła w punkcie x_0.

Ćwiczenie 8. *Zbadać ciągłość funkcji*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|} & \textit{dla } x \neq 1 \\ -2 & \textit{dla } x = 1 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 9. *Dla jakich* $a, b \in \mathbb{R}$ *funkcja*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{ax - \sin x}{x} & \textit{dla } x > 0 \\ b & \textit{dla } x = 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \textit{dla } x < 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

Twierdzenie 11. *(*Weierstrassa* o ograniczoności funkcji ciągłej*)*
Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym, to jest na nim ograniczona.

Twierdzenie 12. *(*Darboux† o miejscach zerowych funkcji*)*
Jeżeli funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ *spełnia warunek* $f(a) < f(b)$ *to*

$$\forall_{w \in \left(f(a), f(b)\right)} \; \exists_{c \in (a,b)} \quad f(c) = w.$$

*Karl Friedrich Weierstrass (1815-1897) - matematyk niemiecki.
†Jean Gaston Darboux (1842-1917) - matematyk francuski

Ćwiczenie 10. *Uzasadnić, że podane równania mają jedno rozwiązanie we wskazanych przedziałach:*

a) $x^4 = 4^x, \quad (-\infty, 0]$;
b) $\ln x = 2 - x, \quad [1, 2]$.