Geometria analityczna w przestrzeni II

Wykład

- Równanie płaszczyzny
- Równania prostej
- Wzajemne położenia punktów, prostych i płaszczyzn

Twierdzenie 1. *(*równanie normalne płaszczyzny*)*
Równanie płaszczyzny π *przechodzącej przez punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i prostopadłej do wektora* $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ *ma postać:*

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Wektor $\overrightarrow{n}$ *nazywamy wektorem normalnym tej płaszczyzny.*

Ćwiczenie 1. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P = (-1, 2, 0)$ *i prostopadłej do wektora* $\overrightarrow{n} = [2, -3, 1]$.

Ćwiczenie 2. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka* AB, *gdzie* $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$ *i prostopadłej do tego odcinka.*

Twierdzenie 2. *(*równanie ogólne płaszczyzny*)*
Każde równanie postaci:

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$*, przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny* $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ *i przecina oś* z *w punkcie* $z = -\frac{D}{C}$*, o ile* $C \neq 0$*.*

Ćwiczenie 3. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $P = (3, -2, 5)$ *i równoległej do płaszczyzny* xOz*.*

Ćwiczenie 4. *Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt* $Q = (1, 3, -2)$ *i przez oś* y*.*

Twierdzenie 3. *(równanie płaszczyzny przez trzy punkty)* *Równanie płaszczyzny* π *przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty* $\overrightarrow{a} = [a_1, a_2, a_3]$, $\overrightarrow{b} = [b_1, b_2, b_3]$ *i* $\overrightarrow{c} = [c_1, c_2, c_3]$ *ma postać:*

$$\pi : \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Twierdzenie 4. *(*równanie odcinkowe płaszczyzny*)*
Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach x, y, z układu współrzędnych odpowiednio odcinki $a, b, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ćwiczenie 5. *Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną* $\pi : x + 2y + 3z - 6 = 0$ *oraz płaszczyznami układu współrzędnych.*

Twierdzenie 5. *(*równanie parametryczne prostej*)*
Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i równoległej do wektora $\overrightarrow{v} = [\alpha, \beta, \gamma]$ jest postaci:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t, \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Wektor $\overrightarrow{v}$ nazywa się wektorem kierunkowym prostej.

Ćwiczenie 6. *Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt* $P = (-1, 0, 3)$ *i równoległej do wektora* $\vec{v} = [2, -1, 5]$.

Ćwiczenie 7. *Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty* $P = (1, 2, 3)$ *i* $Q = (3, 2, 1)$.

Twierdzenie 6. *(*równanie kierunkowe prostej*)*
Równanie prostej l *przechodzącej przez punkt* $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku* $\overrightarrow{v} = [\alpha, \beta, \gamma]$ *jest postaci:*

$$l : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Ćwiczenie 8. *Znaleźć punkty przecięcia prostej*

$$l : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-5}{1}$$

z płaszczyznami układu współrzędnych.

Ćwiczenie 9. *Zbadać, czy proste*

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{-3}, \qquad l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+1}{1}$$

mają punkt wspólny.

Definicja 1. (*równanie krawędziowe prostej*)
Prostą l, która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych prostych

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0, \qquad \pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0,$$

będziemy zapisywać w postaci:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Twierdzenie 7. *(*o wektorze kierunkowym prostej w postaci krawędziowej*)*
Wektor kierunkowy prostej

$$l : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

ma postać

$$\overrightarrow{v} = [A_1, B_1, C_1] \times [A_2, B_2, C_2].$$

Ćwiczenie 10. *Prostą*

$$l : \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$$

zapisać w postaci parametrycznej.

Ćwiczenie 11. *Znaleźć punkt przecięcia prostej*

$$l : \begin{cases} x + y + z + 4 = 0, \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

z płaszczyzną xOz.

Definicja 2. (*rzut punktu na płaszczyznę i na prostą*)
Rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π nazywamy punkt P' tej płaszczyzny spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp \pi.$$

Rzutem prostokątnym punktu P na prostą l nazywamy punkt P' tej prostej spełniający warunek:

$$\overrightarrow{PP'} \perp l.$$

Uwaga 1*.* Wektor jest prostopadły do płaszczyzny, jeżeli jest prostopadły do każdego wektora zawartego w tej płaszczyźnie. Podobnie wektor jest prostopadły do prostej, jeżeli jest prostopadły do każdego wektora zawartego w tej prostej.

Ćwiczenie 12. *Znaleźć rzut prostokątny punktu* $P = (3, -2, 1)$ *na płaszczyznę* $\pi : 2x - y + 3z = 0$.

Ćwiczenie 13. *Znaleźć rzut prostokątny punktu* $P = (2, -1, 4)$ *na prostą* $l : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-3}$.

Twierdzenie 8. *(*odległość punktu od płaszczyzny*)*
Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *od płaszczyzny*

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$$

wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Uwaga 2. Odległość punktu od płaszczyzny jest równa długości wektora łączącego dany punkt z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę. Podobnie odległość punktu od prostej jest równa długości wektora łączącego dany punkt z jego rzutem prostokątnym na tą prostą.

Ćwiczenie 14. *Obliczyć odległość punktu* $P = (5, -1, 6)$ *od płaszczyzny* $\pi : 3x - 4y + 12z - 12 = 0$.

Ćwiczenie 15. *Obliczyć odległość między danymi płaszczyznami równoległymi* $\pi_1 : 3x + y - z - 2 = 0$, $\pi_2 : 3x + y - z + 3$.

Ćwiczenie 16. *Obliczyć odległość punktu* $P = (3, 4, 2)$ *od prostej* $l : \begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 1 + t, \\ z = 3 - 3t, \end{cases}$ *gdzie* $t \in \mathbb{R}$.

Ćwiczenie 17. *Obliczyć odległość między prostymi skośnymi*

$$l_1 : \begin{cases} x = -1 + t, \\ y = -1 + 2t, \ \textit{gdzie } t \in \mathbb{R}, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = s, \\ y = -1 + 2s, \ \textit{gdzie } s \in \mathbb{R}. \\ z = 2 - 2s, \end{cases}$$

Ćwiczenie 18. *Obliczyć odległość prostej* $l : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ *od płaszczyzny* $\pi : 2y + 2z - 5 = 0$.