Aproksymacja funkcji

Wykład 5

- Wielomiany interpolacyjne Lagrange'a i Newtona
- Błąd interpolacji wielomianowej
- Metoda najmniejszych kwadratów

Wstęp

Wykład poświęcony jest jednemu z najstarszych problemów w matematyce, i jednocześnie jednemu z najczęściej stosowanych, mianowicie konstrukcji aproksymacji do danej funkcji, w formie prostszej funkcji (zazwyczaj wielomianowej). Odmianą tego problemu jest konstrukcja gładkiej funkcji aproksymującej zbiór danych punktów.

Interpolacja wielomianowa

Zadanie interpolacji wielomianowej, do którego będziemy się odwoływać w tym wykładzie, polega na znalezieniu wielomianu p możliwie najniższego stopnia, którego wykres przechodzi przez $n+1$ danych punktów (x_i, y_i), tzn.

$$p(x_i) = y_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Mówimy, że wielomian p *interpoluje* wartości y_k w *węzłach* x_k. Jeżeli to są wartości pewnej funkcji f, to mówimy wtedy, że p interpoluje f.

Symbolem Π_n będziemy oznaczać zbiór wszystkich wielomianów co najwyżej n-tego stopnia, tzn. wielomianów postaci:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli liczby $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ są parami różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że*

$$p(x_i) = y_i \qquad (0 \leqslant i \leqslant n).$$

Wzór interpolacyjny Lagrane'a

Twierdzenie 1 mówi, że wielomian interpolacyjny p jest wyznaczony jednoznacznie, ale nie wyklucza istnienia różnych jego postaci i różnych algorytmów jego konstrukcji. Poniższy wzór

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Lagrange'a*. We wzorze tym każde z $l_k(x)$ oznacza wielomian postaci:

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)},$$

co w skróconej wersji zapisujemy jako

$$l_k(x) = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n).$$

Ćwiczenie 1. *Wyznaczyć wielomian interpolacyjny dla punktów:* $(5, 145), (-7, -23), (-6, -54), (0, -954)$ *stosując wzór Lagrange'a.*

Ćwiczenie 2. *Wyznaczyć wielomian interpolujący wartości funkcji* $f(x) = e^x$ *w węzłach* $\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ *stosując wzór Lagrange'a.*

Wzór interpolacyjny Newtona

Poniższy wzór

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

nosi nazwę *wzoru interpolacyjnego Newtona*. Skrócona postać tego wzoru jest następująca:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k q_k(x),$$

gdzie

$$q_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Wartości c_k zależą tylko od węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_k$ i wartości interpolowanej funkcji f w tych węzłach (lub po prostu wartości y_k). Zależność tę będziemy oznaczać:

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k],$$

gdzie prawa strona nosi nazwę *ilorazu różnicowego rzędu k* dla funkcji f i podanych wyżej węzłów.

Ilorazy różnicowe rzędu zerowego i pierwszego są następujące:

$$f[x_0] = f(x_0), \qquad f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}.$$

Ilorazy różnicowe wyższych rzędów oblicza się rekurencyjnie stosując wzór:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}.$$

Mając dane węzły x_i i wartości funkcji $f(x_i)$ (lub po prostu wartości y_i), czyli ilorazy zerowego rzędu $f[x_i]$, tworzymy tablicę ilorazów różnicowych wyższych rzędów. Przykładowa tablica dla przypadku czterech węzłów jest następująca:

$$
\begin{array}{ll|lll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
 & & f[x_0,x_1] & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0,x_1,x_2] & \\
 & & f[x_1,x_2] & & f[x_0,x_1,x_2,x_3] \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1,x_2,x_3] & \\
 & & f[x_2,x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}
$$

Pionowa kreska oddziela wielkości dane od obliczanych. Pierwsze elementy w każdej kolumnie od góry, to ilorazy występujące we wzorze interpolacyjnym Newtona, tzn.

$$c_0 = f[x_0], c_1 = f[x_0,x_1], c_2 = f[x_0,x_1,x_2], c_3 = f[x_0,x_1,x_2,x_3].$$

Ćwiczenie 3. *Stosując wzór interpolacyjny Newtona znaleźć wielomian, którego wykres przechodzi przez punkty:* $(3,1)$,$(1,-3)$,$(5,2)$,$(6,4)$.

Ćwiczenie 4. *Stosując wzór interpolacyjny Newtona znalezć wielomian interpolujący funkcję* $f(x) = \ln x$ *w węzłach* $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ *i* $x_2 = 4$. *Następnie zrobić to samo z dodatkowym węzłem* $x_3 = \frac{1}{2}$.

W obliczeniach numerycznych bardziej użyteczny jest wzór Newtona. Jego zaletą jest to, że dołączenie dodatkowych punktów (x_k, y_k) nie zmienia już obliczonych współczynników c_k. Zaletą wzoru Lagrange'a jest natomiast niezależność wielomianów l_k od wartości y_k, co przydaje się w rozważaniach analitycznych, np. w całkowaniu numerycznym.

Błąd interpolacji wielomianowej

Poniższe twierdzenie pozwala oszacować odchylenie wielomianu interpolacyjnego do funkcji interpolowanej, o ile jest ona dostatecznie regularna.

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $f \in C^{n+1}[a,b]$, *a wielomian* $p \in \Pi_n$ *interpoluje wartości funkcji* f *w* $n+1$ *różnych punktach* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *przedziału* $[a,b]$, *to dla każdego* $x \in [a,b]$ *istnieje takie* $\xi \in (a,b)$, *że*

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Ćwiczenie 5. *Z jaką dokładnością można obliczyć* $\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)$ *stosując interpolację wielomianową dla węzłów:* $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Stosując twierdzenie 2, będziemy chcieli obliczyć błąd bezwzględny $\left|\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) - p\left(\frac{\pi}{24}\right)\right|$, gdzie p jest wielomianem interpolacyjnym stopnia 3. Mamy $n = 3$, przyjmujemy $a = 0$ i $b = \frac{\pi}{3}$. Obliczamy pochodne z funkcji $f(x) = \sin x$, mamy

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x.$$

Zauważy, że $\max_{\xi\in(0,\frac{\pi}{3})} |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Możemy teraz oszacować popełniany błąd bezwzględny, dostajemy

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{24}\right) - p\left(\frac{\pi}{24}\right)\right| < \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{4!}\left|\left(\frac{\pi}{24} - 0\right)\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{3}\right)\right|$$
$$= \frac{\sqrt{3}\pi^4}{48} \approx 0.001112405719.$$

Ćwiczenie 6. *Jaki jest błąd przybliżenia funkcji* $f(x) = \cos x$ *wielomianem interpolacyjnym 9tego stopnia w przedziale* $[0, 1]$, *do którego należą wszystkie węzły.*

Wielomian p jest stopnia 9, wiec $n = 9$. Będziemy potrzebować 10tej pochodnej. W tym przypadku mamy

$$
\begin{aligned}
f(x) = \cos x, f'(x) &= -\sin x, \quad f''(x) = -\cos x, f'''(x) &= \sin x \\
f^{(4)}(x) = \cos x, f^{(5)}(x) &= -\sin x, f^{(6)}(x) = -\cos x, f^{(7)}(x) &= \sin x \\
f^{(8)}(x) = \cos x, f^{(9)}(x) &= -\sin x, f^{(10)}(x) = -\cos x.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $\max_{\xi\in(0,1)} \left| f^{(10)}(\xi) \right| = \max_{\xi\in(0,1)} |-\cos \xi| \leqslant 1$ oraz $\prod_{i=0}^{9} |x - x_i| \leqslant 1$. Ostatecznie dla każdego $x \in [0, 1]$ mamy

$$|\sin x - p(x)| \leqslant \frac{1}{10!} = \frac{1}{3628800} \approx 2.75573922 \cdot 10^{-7}.$$

Metoda najmniejszych kwadratów

Metoda najmniejszych kwadratów jest przykładem najprostszego podejścia do zagadnienia dopasowania danych. Dane są reprezentowane jako punkty na płaszczyźnie. Zadanie polega na znalezieniu takiej krzywej (w tym przypadku będzie to prosta), która najlepiej oddaje ogólny trend.

Metoda najmniejszych kwadratów definiuje najlepiej dopasowaną do danych linię prostą jako tą która minimalizuje sumę kwadratów odległości pomiędzy posiadanymi danymi a tą prostą.

Niech dane będą określone za pomocą par (x_k, y_k), $1 \leqslant k \leqslant n$ dla pewnego n. Chcemy znaleźć współczynniki a i b równania

$$y = ax + b$$

tak, aby funkcja

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \Big(y_k - (ax_k + b)\Big)^2$$

przyjmowała najmniejszą wartość. Jest to typowy problem znajdowania minimum funkcji dwóch zmiennych. Obliczamy pochodne cząstkowe F'_a i F'_b i znajdujemy punkt w którym one jednocześnie znikają. Jest to tzw. punkt stacjonarny. Dla funkcji F określonej jak wyżej punkt stacjonarny jest jej minimum globalnym.

Ćwiczenie 7. *Znaleźć równanie prostej najlepiej dopasowanej do danych:*

x_k	0	1	2	3	4	5
y_k	10	25	51	66	97	118

Ćwiczenie 8. *Dla danych eksperymentalnych*

x_k	0	10	20	30	40	50	60	70
y_k	0.716	0.893	1.055	1.134	1.167	1.281	1.994	2.500

80	90	100	110	120
3.151	4.300	5.308	4.966	10.919

wyznaczyć prostą najlepiej oddającą ogólny trend dla punktów o współrzędnych $(x_k, \ln y_k)$.