Programowanie liniowe

Algorytm transportowy II

- Poprawianie rozwiązań
- Dualny problem transportowy
- Postać optymalna tablicy transportowej

POPRAWIANIE ROZWIĄZAŃ POCZĄTKOWYCH

Pokażemy teraz, że rozwiązanie dopuszczalne przykładowego problemu skonstruowane metodą kąta N-W jest również rozwiązaniem bazowym. W tym celu zapiszemy tablicę sympleksową dla tego problemu i dokonamy jej obrotów.

Podobne rozumowanie, jak przedstawione poniżej, można przeprowadzić także dla rozwiązania dopuszczalnego skonstruowanego metodą minimalnego elementu.

Wróćmy do rozważanego już przykładu.

Przykład 1. *Przedsiębiorstwo „Społem" ma w trzech magazynach po 20 ton mąki w każdym. Trzy piekarnie należące do tego przedsiębiorstwa zgłaszają zapotrzebowanie na (odpowiednio) 10, 30 i 20 ton mąki. Koszty transportu jednej tony mąki z i-tego magazynu do j-tej piekarni zawiera macierz*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ustalić plan przewozu mąki z magazynów do piekarni minimalizujący łączne koszty transportu.

Przypomnijmy, że rozważany przykład ma następujący program liniowy w postaci kanonicznej:

$$
(1) \qquad \begin{cases}
z = 2x_{11} + 4x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad + x_{31} + x_{32} + 6x_{33} \to \text{min} \\
\left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20
\end{array}\right\} \text{warunki dla dostawców} \\
\left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20
\end{array}\right\} \text{warunki dla odbiorców} \\
x_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i, j = 1, 2, 3,
\end{cases}
$$

gdzie x_{ij} oznacza wielkość przewozu z i-tego magazynu do j-tej piekarni.

Rozwiązanie tego zadania, uzyskane poprzednio metodą kąta N-W i zapisane w tablicy transportowej, jest postaci:

$$
(2) \qquad \begin{array}{c|ccc}
 & 10 & 30 & 20 \\
\hline
20 & 2^{10} & 4^{10} & 3 \\
20 & 1 & 5^{20} & 2^{0} \\
20 & 1 & 1 & 6^{20}
\end{array}
$$

Wartość funkcji celu, tzn. całkowity koszt przewozu dla tego rozwiązania, wynosi: $z = 280$.

Tablica sympleksowa programu (1) jest postaci:

(3)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
0	2	4	3	1	5	2	1	1	6
20	1	1	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	$\underline{1}$	0	0	1	0	0	1	0	0
30	0	1	0	0	1	0	0	1	0
20	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Będziemy teraz dokonywać obrotów tej tablicy, wprowadzając do bazy zmienne w takiej kolejności, jak w metodzie N-W. Zgodnie z tablicą transportową (2), dostajemy następującą kolejność kolumn obrotów: $x_{11} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{23} \to x_{33}$.

Uwaga 1. (ILOŚĆ ZMIENNYCH BAZOWYCH W ROZW.) Zauważmy, że w przypadku zagadnienia transportowego zamkniętego, kiedy suma podaży jest równa sumie popytu, jedno z ograniczeń jest zawsze zbędne. Dla przykładu w naszej tablicy, wystarczy pomnożyć ostatnie trzy wiersze przez -1, następnie dodać pierwsze pięć wierszy do ostatniego, aby otrzymać wiersz zer. Z tego powodu bazowe rozwiązanie dopuszczalne będzie zawsze zawierać $m + n - 1$ zmiennych bazowych.

Oznacza to, że dla naszej tablicy musimy wykonać: $3+3-1 = 5$ obrotów (co jest zgodne ilością kolumn obrotów, którą podaliśmy wyżej).

Pozostaje jeszcze tylko wybrać wiersze obrotu. Zmienna $x_{11} = 10$, zatem do pierwszego obrotu należy wybrać wiersz czwarty. Wykonujemy obrót wokół zaznaczonego elementu w tablicy (3). Otrzymujemy:

(4)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-20	0	4	3	-1	5	2	-1	1	6
10	0	$\underline{1}$	1	-1	0	0	-1	0	0
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
30	0	1	0	0	1	0	0	1	0
20	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Zmienna $x_{12} = 10$. Uzyskujemy to wykonując obrót tablicy (4) wokół zaznaczonego elementu. Dostajemy:

(5)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-60	0	0	-1	3	5	2	3	1	6
10	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
20	0	0	-1	1	$\underline{1}$	0	1	1	0
20	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Zmienna $x_{22} = 20$. Wykonujemy obrót tablicy (5) wokół zaznaczonego elementu i dostajemy:

(6)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-160	0	0	4	-2	0	2	-2	-4	6
10	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	0	0	$\underline{1}$	-1	-1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
20	0	0	-1	1	1	0	1	1	0
20	0	0	1	0	0	1	0	0	1

Wykonujemy obrót dający: $x_{23} = 0$. Mamy

(7)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-160	0	0	2	-2	0	0	0	-2	6
10	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	$\underline{1}$
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
20	0	0	-1	1	1	0	1	1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1

Wykonujemy ostatni obrót dający: $x_{33} = 20$. Dostajemy:

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-280	0	0	2	-2	0	0	-6	-8	0
10	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
20	0	0	-1	1	1	0	1	1	0
~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

(8)

Po skreśleniu wiersza zer dostajemy tablicę w postaci kanonicznej z bazowym rozwiązaniem dopuszczalnym takim, jak wcześniej uzyskane metodą kąta N-W.

Widzimy, że nie jest to rozwiązanie optymalne, gdyż w wierszu funkcji celu występują współczynniki ujemne. Taki słuszny wniosek jest zgodny z kryterium optymalności dla tablicy sympleksowej.

Powstaje pytanie: „Czy istnieje podobne kryterium optymalności dla tablicy transportowej?"

Odpowiedź jest twierdząca - tak, istnieje!

Kryterium optymalności - poprawianie rozwiązań dla zagadnienia transportowego wynika z analizy dualnego zagadnienia transportowego.

DUALNY PROBLEM TRANSPORTOWY

Na wstępie przypomnijmy jeszcze raz program liniowy naszego przykładowego problemu i utwórzmy program dualny do niego. Mamy

$$\begin{cases} 2x_{11}+4x_{12}+3x_{13}+x_{21}+5x_{22}+2x_{23}+x_{31}+x_{32}+6x_{33} \to \text{min} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}=20 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=20 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=20 \end{array}\right\} \text{ warunki dla dostawców} \\ \left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{21}+x_{31}=10 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=30 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=20 \end{array}\right\} \text{ warunki dla odbiorców} \\ x_{ij} \geqslant 0 \text{ dla } i,j=1,2,3. \end{cases}$$

Program dualny jest postaci:

$$\begin{cases} 20u_1 + 20u_2 + 20u_3 + 10v_1 + 30v_2 + 20v_3 \to \text{max} \\ u_1 + v_1 \leqslant 2 \\ u_1 + v_2 \leqslant 4 \\ u_1 + v_3 \leqslant 3 \\ u_2 + v_1 \leqslant 1 \\ u_2 + v_2 \leqslant 5 \\ u_2 + v_3 \leqslant 2 \\ u_3 + v_1 \leqslant 1 \\ u_3 + v_2 \leqslant 1 \\ u_3 + v_3 \leqslant 6 \\ u_i, v_j \text{ dowolne } , i, j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Dla dowolnego zagadnienia transportowego:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \text{min} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, \dots, m) \quad \text{(warunki dla dostawców)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad \text{(warunki dla odbiorców)} \\ x_{ij} \geqslant 0 \quad \text{dla każdego } (i, j) \end{cases}$$

program dualny jest postaci:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j \to \text{max} \\ u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{dla każdego } (i, j) \\ u_1, \dots, u_m, \; v_1, \dots, v_n \text{ - dowolne} \end{cases}$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$u = [u_1, \ldots, u_m]^T, v = [v_1, \ldots, v_n]^T;$$

$$a = [a_1, \ldots, a_m]^T, b = [b_1, \ldots, b_n]^T.$$

Teraz dualną funkcję celu możemy zapisać w postaci:

$$\beta(u, v) = a^T u + b^T v.$$

Pierwotną funkcję celu oznaczmy podobnie:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Przypomnijmy, że podstawowe twierdzenie o własnościach dopuszczalnych rozwiązań dualnych mówi, że jeżeli wektory x oraz (u, v) są dopuszczalne i zachodzi równość:

$$\alpha(x) = \beta(u, v),$$

to rozwiązania sa optymalne. Co jest równoważne temu, że

$$\alpha(x) - \beta(u, v) = 0.$$

Przyjrzyjmy się lewej stronie tego równania. Mamy

$$\alpha(x) - \beta(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i - \sum_{j=1}^{n} b_j v_j.$$

Jeżeli x jest rozwiązaniem dopuszczalnym, to wtedy spełnione są ograniczenia:

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \text{ i } b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}.$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{aligned}\alpha(x)-\beta(u,v) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}u_i - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_{ij}v_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}u_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}v_j \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}x_{ij} - x_{ij}u_i - x_{ij}v_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}.\end{aligned}$$

Możemy stąd wnioskować, że wektory x oraz (u,v) są optymalne, jeżeli te wektory sa dopuszczalne i dla każdej bazowej pozycji (i,j) w tablicy transportowej zachodzi:

$$c_{ij} - u_i - v_j = 0$$

lub równoważnie:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Pokażemy teraz jak zastosować te rozważania w praktyce, na przykładzie naszego, częściowo rozwiązanego problemu transportowego. Sprawdzimy czy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, uzyskane metodą kąta N-W jest optymalne (z analizy tablicy sympleksowej wiemy, że nie jest).

W programie dualnym do naszego problemu mamy następujące zmienne dualne:

$$u_1, u_2, u_3, \ v_1, v_2, v_3.$$

Szukamy takich wartości tych zmiennych, żeby w pozycjach bazowych (i, j) spełnione było równanie

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Przypomnijmy uzyskane wcześniej rozwiązanie (podkreślono pozycje bazowe):

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 10 & 30 & 20 & \\
\hline
20 & \underline{2^{10}} & \underline{4^{10}} & 3 & u_1 \\
20 & 1 & \underline{5^{20}} & \underline{2^{0}} & u_2 \\
20 & 1 & 1 & \underline{6^{20}} & u_3 \\
\hline
 & v_1 & v_2 & v_3 &
\end{array}
$$

Dostajemy stąd układ:

$$
\begin{cases}
u_1 + v_1 = 2 \\
u_1 + v_2 = 4 \\
u_2 + v_2 = 5 \\
u_2 + v_3 = 2 \\
u_3 + v_3 = 6
\end{cases}
$$

Jest to układ nieoznaczony i można go rozwiązać bardzo łatwo ze względu na jego specjalną strukturę. Żeby znaleźć rozwiązanie wystarczy wybrać dowolną zmienną i nadać jej jakąś wartość, np. $v_1 = 2$. Następnie, patrząc na tablicę (łańcuchowo) wyznaczyć wartości pozostałych zmiennych:

$$
\begin{array}{lll}
v_1 = 2, & u_1 + v_1 = 2 \implies & u_1 = 0 \\
u_1 = 0, & u_1 + v_2 = 4 \implies & v_2 = 4 \\
v_2 = 4, & u_2 + v_2 = 5 \implies & u_2 = 1 \\
u_2 = 1, & u_2 + v_3 = 2 \implies & v_3 = 1 \\
v_3 = 1, & u_3 + v_3 = 6 \implies & u_3 = 5.
\end{array}
$$

Uwaga 2. Można zacząć od dowolnej innej zmiennej dualnej.

Aby sprawdzić czy dane rozwiązanie jest optymalne, utworzymy teraz nową tablicę, tzw. *tablicę kosztów zastępczych*, której elementy będą postaci:

$$(c_{ij} - u_i - v_j)^{x_{ij}} \quad \text{dla każdego } (i, j).$$

Uwaga 3. Odejmujemy od i-tego wiersza wartość u_i, a od j-tej kolumny wartość v_j.

Otrzymujemy:

$$\begin{array}{c|ccc|cc}
 & & & & & \\
\hline
 & \underline{2^{10}} & \underline{4^{10}} & 3 & 0 & u_1 \\
 & 1 & \underline{5^{20}} & \underline{2^{0}} & 1 & u_2 \\
 & 1 & 1 & \underline{6^{20}} & 5 & u_3 \\
\hline
 & 2 & 4 & 1 & & \\
 & v_1 & v_2 & v_3 & &
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\
\hline
 & \underline{0^{10}} & \underline{0^{10}} & 2 \\
 & -2 & \underline{0^{20}} & \underline{0^{0}} \\
 & -6 & -8 & \underline{0^{20}}
\end{array}$$

Uwaga 4. Zauważmy, że w powyższej tablicy kosztów zastępczych, zgodnie z konstrukcją, występują zera dla wszystkich x_{ij} bazowych.

Zauważmy ponadto, że zgodnie z konstrukcją u i v wiemy, że dla bieżącego rozwiązania dopuszczalnego x zachodzi:

$$\alpha(x) = \beta(u, v).$$

Zatem, żeby stwierdzić czy bieżące rozwiązanie x jest optymalne czy nie, wystarczy sprawdzić czy wektor (u, v) jest dopuszczalny dla problemu dualnego. Rozwiązanie dopuszczalne (u, v) musi spełniać ograniczenia, tzn.

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij} \quad \text{dla każdego } (i, j),$$

co możemy zapisać równoważnie zapisać:

$$c_{ij} - u_i - v_j \geqslant 0 \quad \text{dla każdego } (i, j).$$

Kryterium optymalności: Dane rozwiązanie dopuszczalne, zapisane w tablicy transportowej, jest optymalne, jeżeli w utworzonej dla niego tablicy kosztów zastępczych, wszystkie elementy są nieujemne.

Wniosek: Analizowane wyżej, rozwiązanie zadania (1), nie jest optymalne - w tablicy kosztów zastępczych mamy trzy elementy ujemne.

Uwaga 5. Zamiana tablicy kosztów na tablicę kosztów zastępczych w dalszej analizie (przy niezmienionych wartościach podaży i popytu oraz przy ustalonych u i v spełniających równania: $u_i + v_j = c_{ij}$) nie zmienia rozwiązania optymalnego.

Wniosek: W dalszych etapach rozwiązywania, można posługiwać się tablicą kosztów zastępczych.

Uwaga 6. Zauważmy, że ostatnia tablica kosztów zastępczych odpowiada tablicy sympleksowej (8) otrzymanej poprzednio. W szczególności:

koszty zastępcze są równe współczynnikom funkcji celu.

Tak więc kryterium optymalności tablicy transportowej jest równoważne kryterium optymalności tablicy sympleksowej.

Zgodnie z tym co stwierdziliśmy wyżej, rozwiązanie zapisane w tablicy transportowej z kosztami zastępczymi:

$$\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & \underline{0^{10}} & \underline{0^{10}} & 2 \\ & -2 & \underline{0^{20}} & \underline{0^{0}} \\ & -6 & -8 & \underline{0^{20}} \end{array}$$

nie jest optymalne. Pojawia się pytanie:

Jak poprawić rozwiązanie, otrzymane w tablicy transportowej?

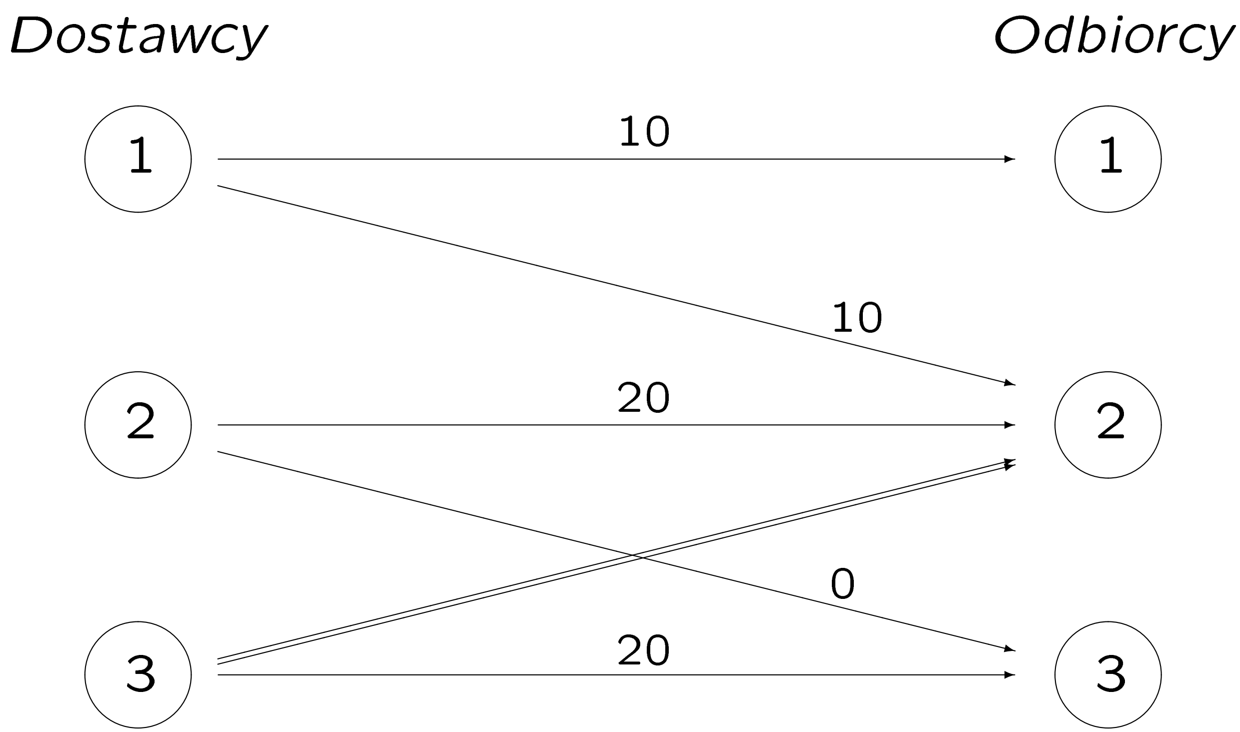
Jeśli byłoby ono zapisane w tablicy sympleksowej, to odpowiedź byłaby prosta - należy wykonać obrót zgodny z zasadą sympleks.

W analizowanym przykładzie jest to obrót wokół zaznaczonego elementu w tablicy sympleksowej nr (8):

(8)

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{31}	x_{32}	x_{33}
-280	0	0	2	-2	0	0	-6	-8	0
10	0	1	1	-1	0	0	-1	0	0
0	0	0	1	0	0	1	-1	-1	0
20	0	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	0	1	0	0	1	0	0
20	0	0	-1	1	1	0	1	$\underline{1}$	0

Spróbujmy zobaczyć, jakiej operacji na tablicy transportowej, odpowiada ten obrót. W tym celu zróbmy nieco inną ilustrację tego rozwiązania:



Zwiększenie wartości zmiennej x_{32} (z $x_{32} = 0$ na $x_{32} = t > 0$, gdyż staje się zmienną bazową) odpowiada dodaniu nowej trasy (podwójna strzałka) na rysunku powyżej. Jednocześnie trzeba zmienić wielkości przewozów na pozostałych trasach tak, aby rozwiązanie pozostało dopuszczalne.

Jest to łatwe, jeżeli zauważy się, że dorysowana trasa tworzy w analizowanej sieci transportowej, pętlę $D_3O_2D_2O_3D_3$, gdzie D_i oznacza i-tego dostawcę, zaś O_j - j-tego odbiorcę. Przy czym niektóre trasy trzeba przejść „pod prąd''.

Kluczowa obserwacja, która pozwala na zinterpretowanie obrotu tablicy sympleksowej w narysowanej sieci transportowej jest następująca:

Uwaga 7. Jeżeli, rozpoczynając od „nowej'' trasy, będziemy kolejno dodawać i odejmować od przewozów dodatnią wartość t, to nowe rozwiązanie $x(t)$ będzie dopuszczalne, o ile wszystkie jego składniki będą nieujemne.

Na przykład, biorąc $x_{32} = t > 0$, otrzymujemy:

$$x_{22} = 20 - t, \quad x_{23} = 0 + t, \quad x_{33} = 20 - t,$$

a wszystkie pozostałe składowe wektora rozwiązania $x(t)$ pozostawiamy nie zmienione, ponieważ nie wchodzą w skład pętli.

Skonstruowane w ten sposób nowe rozwiązanie spełnia warunki dotyczące podaży i popytu i jest dopuszczalne, gdy

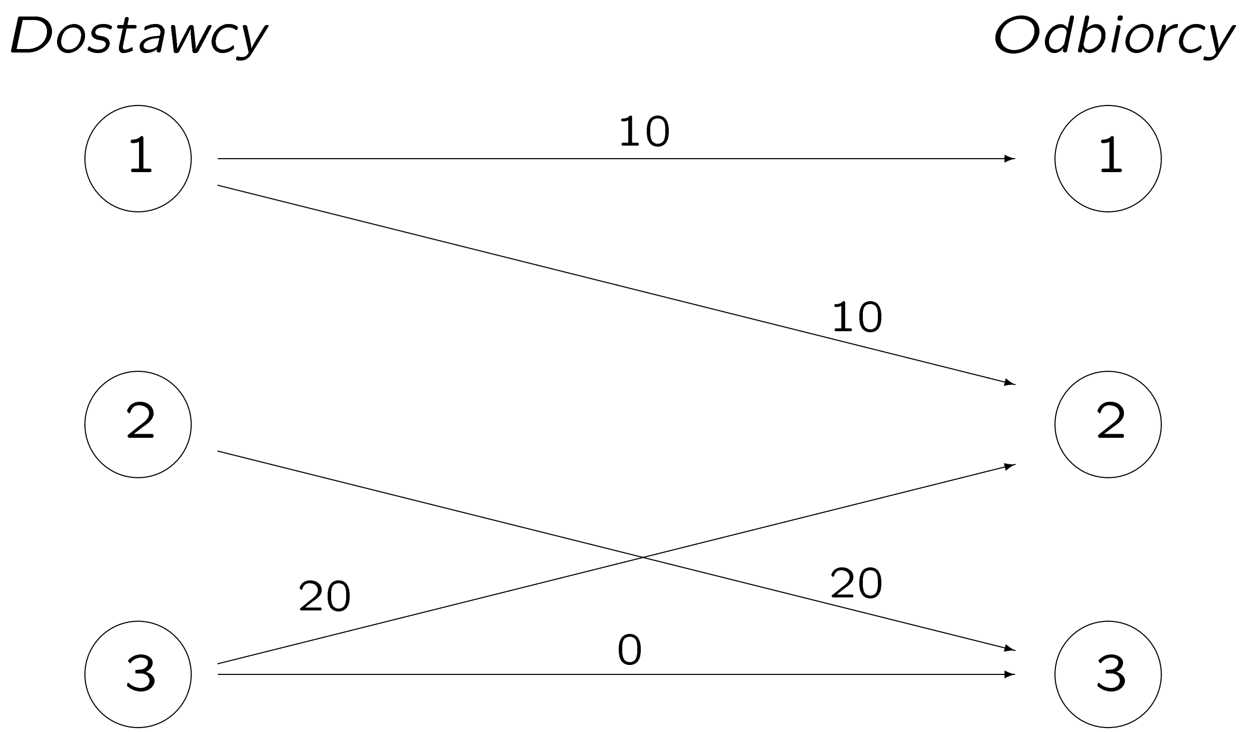
$$20 - t \geqslant 0, \quad \text{czyli} \quad t \leqslant 20.$$

Zatem dodając do poszczególnych przewozów w pętli $t = 20$, gdy idziemy „z prądem'' i odejmując $t = 20$, gdy idziemy „pod prąd'', otrzymamy nowe rozwiązanie dopuszczalne, z wartością funkcji celu pomniejszą o $8 \cdot 20 = 160$.

Uwaga 8. W tym przypadku przesunięcie 20 jednostek „wzdłuż pętli'' spowodowało wyzerowanie dwóch zmiennych bazowych. Jedną z nich usuniemy z bazy, natomiast druga musi pozostać (liczba zmiennych w bazie jest stała) - dostajemy rozwiązanie zdegenerowane.

Uzasadnienie tego faktu jest proste, gdy popatrzymy na tablicę sympleksową nr (8). Kolumna obrotu, tzn. kolumna zmiennej x_{32}, ma dwa wiersze o minimalnym ilorazie, zatem możemy wybrać, którą zmienną usuniemy z bazy: x_{22} czy x_{33}.

Jeżeli usuniemy zmienną x_{22}, to nowe rozwiązanie bazowe będzie można przedstawić za pomocą poniższej sieci transportowej, w której x_{33} pozostaje zmienną bazową z zerowym przewozem.



Spróbujmy teraz przeprowadzoną wyżej procedurę konstrukcji lepszego rozwiązania bazowego przenieść do tablicy transportowej.

Wróćmy do ostatniej tablicy kosztów zastępczych. Do nowej bazy wprowadzamy trasę (tzn. zmienną) dla której koszt zastępczy jest ujemny. W naszym przykładzie wybraliśmy trasę x_{32} dla której ten koszt jest równy -8. Tworzymy pętlę, przesuwając się kolejno raz w poziomie, raz w pionie, pomiędzy punktami (trasami) bazowymi (pętla taka zawsze ma parzystą liczbę wierzchołków - co najmniej cztery).

	0^{10}	0^{10}	2
	-2	0^{20-t}	0^{0+t}
	-6	-8^{t}	0^{20-t}

Wiemy już, że aby rozwiązanie pozostało dopuszczalne, tzn. aby wszystkie przewozy pozostały nieujemne, musi być $t = 20$. W ten sposób uzyskujemy nowe rozwiązanie bazowe:

$$\begin{array}{c|lll} & & & \\ \hline & 0^{10} & 0^{10} & 2 \\ & -2 & 0^{\mathrm{x}} & 0^{20} \\ & -6 & -8^{20} & 0^{0} \end{array}$$

Z bazy usuwamy tę zmienną dla której nowy przewóz jest równy zero. Mamy dwie takie zmienne - do usunięcia wybieramy x_{22}.

Po uzyskaniu nowego rozwiązania bazowego należy sprawdzić czy jest ono optymalne. Stwierdzamy to tak jak poprzednio, tworząc nową (kolejną) tablicę kosztów zastępczych. Dostajemy

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & & & & u_i \\
\hline
 & 0^{10} & 0^{10} & 2 & 0 \\
 & -2 & 0 & 0^{20} & \text{-8} \\
 & -6 & -8^{20} & 0^{0} & \text{-8} \\
\hline
v_j & 0 & 0 & 8 &
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\
\hline
 & 0^{10} & 0^{10} & -6 \\
 & 6 & 8 & 0^{20} \\
 & 2 & 0^{20} & 0^{0}
\end{array}
$$

W otrzymanej tablicy nie wszystkie elementy są nieujemne, więc otrzymane rozwiązanie nie jest optymalne.

Tworzymy kolejne, lepsze rozwiązanie. Wprowadzamy do bazy trasę z ujemnym kosztem zastępczym i jeszcze raz powtarzamy całą procedurę:

0^{10}	0^{10-t}	-6^{t}
6	8	0^{20}
2	0^{20+t}	0^{0-t}

Powstała pętla w której może być maksymalnie $t = 0$.

Dostajemy rozwiązanie w którym właściwie nie zmieniamy planu przewozów (funkcja celu też nie zmienia wartości) - mamy jedynie wymianę zmiennych bazowych: usuwamy zmienną x_{33}, a wprowadzamy x_{13}. Dostajemy

$$
\begin{array}{c|lll}
 & & & \\
\hline
 & 0^{10} & 0^{10} & -6^{0} \\
 & 6 & 8 & 0^{20} \\
 & 2 & 0^{20} & 0^{\mathrm{x}}
\end{array}
$$

Dla nowego rozwiązania jeszcze raz wyznaczamy tablicę kosztów zastępczych i okazuje się, że jest ono optymalne. Mamy

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & & & & u_i \\
\hline
 & 0^{10} & 0^{10} & -6^{0} & 0 \\
 & 6 & 8 & 0^{20} & 6 \\
 & 2 & 0^{20} & 0 & 0 \\
\hline
v_j & 0 & 0 & -6 &
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\
\hline
 & 0^{10} & 0^{10} & 0^{0} \\
 & 0 & 2 & 0^{20} \\
 & 2 & 0^{20} & 6
\end{array}
$$