Laboratorium do Wykładu 3

(Wszystkie ćwiczenia pochodzą z wykładu 3)

1 Algorytm Gaussa

Ćwiczenie 1.

Zapisuję macierz rozszerzoną [A|B]

```
A_u:matrix([4,2,−1,5],[1,4,1,12],[2,−1,4,12]);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$

Sprowadzam macierz A_u do macierzy trójkątnej górnej. Robię to w dwóch krokach - kolumna po kolumnie.
Dla pierwszej kolunmy: Od wiersza drugiego odejmuję wiersz pierwszy pomnożony przez 1/4, a od wiersza trzeciego wiersz pierwszy pomnożony przez 1/2.

```
A_u:rowop(A_u,2,1,1/4);
A_u:rowop(A_u,3,1,1/2);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4} \\ 2 & -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$

(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4} \\ 0 & -2 & \frac{9}{2} & \frac{19}{2} \end{pmatrix}$

Dla kolumny drugiej: od wiersza trzeciego odejmuję wiersz drugi pomnożony przez -4/7.

```
A_u:rowop(A_u,3,2,−4/7);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4} \\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14} \end{pmatrix}$

Na tym etapie kończy się algorytm podstawowy. Pozostaje rozwiązać układ zaczynając od trzeciego równania. Wprowadzam macierz niewiadomych.

```
X:matrix([x],[y],[z]);
```

(X) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Zapisuję macierz A (macierz główną układu) i macierz B.

```
A:submatrix(A_u,4);
B:submatrix(A_u,1,2,3);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{73}{14} \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 5 \\ \frac{43}{4} \\ \frac{219}{14} \end{pmatrix}$

Zapisuję równanie trzecie.

```
row(A,3).X=B[3,1];
```

(%o8) $\frac{73\,z}{14}=\frac{219}{14}$

Wyznaczam niewiadomą z z równania.

```
solve(%);
```

(%o9) $[z=3]$

Zapisuję równanie drugie.

```
row(A,2).X=B[2,1];
```

(%o10) $\frac{5\,z}{4}+\frac{7\,y}{2}=\frac{43}{4}$

Podstawiam za z i wyznaczam niewiadomą y z równania.

```
%o10,z:3;
```
(%o11) $\frac{7\,y}{2}+\frac{15}{4}=\frac{43}{4}$

```
solve(%);
```
(%o12) $[y=2]$

Zapisuję równanie pierwsze.

```
row(A,1).X=B[1,1];
```
(%o13) $-z+2\,y+4\,x=5$

Podstawiam za y i z, i wyznaczam x z tego równania.

```
%,y:2,z:3;
```
(%o14) $4\,x+1=5$

```
solve(%);
```
(%o15) $[x=1]$

Mamy rozwiązanie uzyskane za pomoca eliminacji podstawowej.

```
kill(all);
```
(%o0) *done*

Wykonamy teraz pełną eliminację (str.6-7, wykład 3).

Etap 1. Sprowadzam macierz A_u do macierzy trójkątnej górnej (czyli tak jak już to zrobiliśmy) - jest to tzw. eliminacja w przód.
Etap 2. W analogiczny sposób zeruję wszystkie elementy nad przekątną. Robię to w dwóch krokach - kolumna po kolumnie. Teraz zaczynam od trzeciej - jest to tzw. eliminacja wstecz.
Etap 3. Dzielę wiersze tak, aby uzyskać jedynki na przekątnej.

Etap 1.

```
A_u:matrix([4,2,-1,5],[1,4,1,12],[2,-1,4,12]);
```
(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \end{pmatrix}$

```
A_u:rowop(A_u,2,1,1/4);
A_u:rowop(A_u,3,1,1/2);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 5\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4}\\ 2 & -1 & 4 & 12\end{pmatrix}$$

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 5\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4}\\ 0 & -2 & \frac{9}{2} & \frac{19}{2}\end{pmatrix}$$

```
A_u:rowop(A_u,3,2,-4/7);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 5\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4}\\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14}\end{pmatrix}$$

Etap 2.

Dla kolumny trzeciej. Odejmuję od wiersza pierwszego wiersz trzeci pomnozony przez -14/73, a od wiersza drugiego wiersz trzeci pomnożony przez 35/146.

```
A_u:rowop(A_u,1,3,-14/73);
A_u:rowop(A_u,2,3,35/146);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & 8\\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4}\\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14}\end{pmatrix}$$

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix}4 & 2 & 0 & 8\\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 7\\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14}\end{pmatrix}$$

Dla kolumny drugiej. Odejmuję od wiersza pierwszego wiersz drugi pomnożony przez 4/7.

```
A_u:rowop(A_u,1,2,4/7);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14} \end{pmatrix}$

Etap 3. Możę pierwszy wiersz przez 1/4, drugi przez 2/7, a trzeci przez 14/73.

```
A_u:matrix([1/4,0,0],[0,2/7,0],[0,0,14/73]).A_u;
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Zapisuję macierz niewiadomych oraz macierze A i B.

```
X:matrix([x],[y],[z]);
A:submatrix(A_u,4);
B:submatrix(A_u,1,2,3);
```

(X) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Zapisuję równania odpowiadające wierszom macierzy A_u.

```
row(A,1).X=B[1,1];
row(A,2).X=B[2,1];
row(A,3).X=B[3,1];
```

(%o12) $x=1$

(%o13) $y=2$

(%o14) $z=3$

Mamy rozwiązanie.

Wyznacznik macierzy A za pomocą algorytmu Gaussa obliczamy stosując podstawową eliminację Gaussa (Uwaga 3, str. 8). Mamy już to zrobione w %o4.

```
%o4;
```

(%o15) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{5}{4} & \frac{43}{4} \\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{219}{14} \end{pmatrix}$

Wyznacznik macierzy A jest równy iloczynowi elementów na przekątnej.

```
4·7/2·73/14;
```

(%o16) 73

Można zrobić sprawdzenie.

```
A:matrix([4,2,−1],[1,4,1],[2,−1,4]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

```
determinant(A);
```

(%o20) 73

Rząd macierzy A i A_u jest równy 3 (Uwaga 1, str. 8).

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 2.

Wprowadzam macierz główną układu

```
A:matrix([6,−2,2,4],[12,−8,6,10],[3,−13,9,3],[−6,4,1,−18]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$

i macierz uzupełnioną (tym razem przez dołaczenie kolumny wyrazów wolnych).

```
→ A_u:addcol(A,[12,34,27,−38]);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{pmatrix}$$

Będę stosował pełną eliminację Gaussa.
Etap 1 (eliminacja w przód).

```
→ A_u:rowop(A_u,2,1,2);
A_u:rowop(A_u,3,1,1/2);
A_u:rowop(A_u,4,1,−1);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{pmatrix}$$

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & 21 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{pmatrix}$$

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & 21 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -26 \end{pmatrix}$$

```
→ A_u:rowop(A_u,3,2,3);
A_u:rowop(A_u,4,2,−1/2);
```

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & -26 \end{pmatrix}$$

$$(A\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & -21 \end{pmatrix}$$

```
A_u:rowop(A_u,4,3,2);
```

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4 & 12\\0 & -4 & 2 & 2 & 10\\0 & 0 & 2 & -5 & -9\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

Etap 2 (eliminacja wstecz).

```
A_u:rowop(A_u,3,4,5/3);
A_u:rowop(A_u,2,4,-2/3);
A_u:rowop(A_u,1,4,-4/3);
```

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4 & 12\\0 & -4 & 2 & 2 & 10\\0 & 0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4 & 12\\0 & -4 & 2 & 0 & 8\\0 & 0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 0 & 8\\0 & -4 & 2 & 0 & 8\\0 & 0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

```
A_u:rowop(A_u,2,3,1);
A_u:rowop(A_u,1,3,1);
```

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 0 & 8\\0 & -4 & 0 & 0 & 12\\0 & 0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

(A_u) $\begin{pmatrix}6 & -2 & 0 & 0 & 12\\0 & -4 & 0 & 0 & 12\\0 & 0 & 2 & 0 & -4\\0 & 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$

```
A_u:rowop(A_u,1,2,1/2);
```

(A_u) $$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Etap 3 (redukuję przekształconą macierz główna do macierzy jednostkowej).

```
A_u:matrix([1/6,0,0,0],[0,−1/4,0,0],[0,0,1/2,0],[0,0,0,−1/3]).A_u;
```

(A_u) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
X:matrix([x1],[x2],[x3],[x4]);
A:submatrix(A_u,5);
B:submatrix(A_u,1,2,3,4);
```

(X) $$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B) $$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zapisuję równania odpowiadające wierszom macierzy A_u.

```
→ row(A,1).X=B[1,1];
  row(A,2).X=B[2,1];
  row(A,3).X=B[3,1];
  row(A,4).X=B[4,1];
```

(%o19) $x1=1$

(%o20) $x2=-3$

(%o21) $x3=-2$

(%o22) $x4=1$

Mamy rozwiązanie.

```
→ kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 3.

Stosuję Uwagę 1 (str. 8) z tym, że nie jest konieczne wykonywanie pełnej eliminacji Gaussa. Liczba r jest też jednoznacznie wyznaczona przez elimnację podstawową.

a)

```
→ A:matrix([1,2,0,0],[0,2,−1,3],[0,0,0,2],[0,0,0,1]);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
→ A:rowop(A,4,3,1/2);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zamieniam miejscami kolunmy 3 i 4.

```
→ A: columnswap(A,3,4);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mamy r=3.

b)

```
B:matrix([3,0,2,−2],[1,2,0,1],[0,0,4,1],[5,1,−2,0]);
```

(B)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
B:rowop(B,2,1,1/3);
B:rowop(B,4,1,5/3);
```

(B)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(B)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{16}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

```
B:rowop(B,4,2,1/2);
```

(B)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

```
B:rowop(B,4,3,−5/4);
```

(B)
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

Mamy r=4.

c)

```
C:matrix([2,5,1,1,3,5],[2,2,−1,2,1,2],[1,1,1,1,−1,1],[0,3,2,−1,2,3]);
```

(C) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
C:rowop(C,2,1,1);
C:rowop(C,3,1,1/2);
```

(C) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(C) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

```
C:rowop(C,3,2,1/2);
C:rowop(C,4,2,−1);
```

(C) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(C) $$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mamy r=3.

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 4.
Stosuję algorytm ze str. 4.

a)

Wprowadzam macierz A.

```
A:matrix([2,2,3],[1,−1,0],[−1,2,1]);
```

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Dołączam macierz jednostkową.

```
A_u:addcol(A,ident(3));
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Stosuję pełny algorytm Gaussa.

Etap 1.

```
A_u:rowop(A_u,2,1,1/2);
A_u:rowop(A_u,3,1,−1/2);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(A_u) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

```
A_u:rowop(A_u,3,2,−3/2);
```

(A_u) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$

Etap 2.

```
A_u:rowop(A_u,2,3,−6);
A_u:rowop(A_u,1,3,12);
```

(A_u) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(A_u) $$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 & -18 & -12 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

```
A_u:rowop(A_u,1,2,−1);
```

(A_u) $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Etap 3.

```
A_u:matrix([1/2,0,0],[0,−1/2,0],[0,0,4]).A_u;
```

(A_u) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Wypisuję macierz odwrotną przez skreślenie w A_u trzech pierwszych kolumn.

```
B:submatrix(A_u,1,2,3);
```

(B) $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Zróbmy jeszcze sprawdzenie.

```
A.B;
B.A;
```

(%o13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(%o14) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oznacza, że B jest macierzą odwrotną do A.

```
kill(all);
```

(%o0) *done*

b) Macierz B jest macierzą glówna układu z ćwiczenia 2, więc wykorzystamy możemy skopiować większość zapisanych wyżej poleceń.

Wprowadzam macierz B.

```
B:matrix([6,−2,2,4],[12,−8,6,10],[3,−13,9,3],[−6,4,1,−18]);
```

(B) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$

i dołączam macierz jednostkową.

```
B_u:addcol(B,ident(4));
```

(B_u) $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Będę stosował pełną eliminację Gaussa.
Etap 1 (eliminacja w przód).

```
→ B_u:rowop(B_u,2,1,2);
  B_u:rowop(B_u,3,1,1/2);
  B_u:rowop(B_u,4,1,−1);
```

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 8 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
→ B_u:rowop(B_u,3,2,3);
  B_u:rowop(B_u,4,2,−1/2);
```

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & \frac{11}{2} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -14 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & \frac{11}{2} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -13 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
→ B_u:rowop(B_u,4,3,2);
```

(B_u) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & \frac{11}{2} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Etap 2 (eliminacja wstecz).

```
B_u:rowop(B_u,3,4,5/3);
B_u:rowop(B_u,2,4,-2/3);
B_u:rowop(B_u,1,4,-4/3);
```

(B_u)
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(B_u)
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -\frac{28}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(B_u)
$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 & -\frac{41}{3} & \frac{26}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -4 & 2 & 0 & -\frac{28}{3} & \frac{16}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
B_u:rowop(B_u,2,3,1);
B_u:rowop(B_u,1,3,1);
```

$$(B\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 & -\frac{41}{3} & \frac{26}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -\frac{199}{6} & \frac{115}{6} & -\frac{17}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(B\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 & 0 & -\frac{75}{2} & \frac{45}{2} & -7 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -\frac{199}{6} & \frac{115}{6} & -\frac{17}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
B_u:rowop(B_u,1,2,1/2);
```

$$(B\_u)\quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & -\frac{251}{12} & \frac{155}{12} & -\frac{25}{6} & \frac{11}{6} \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -\frac{199}{6} & \frac{115}{6} & -\frac{17}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{143}{6} & -\frac{83}{6} & \frac{13}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -11 & \frac{13}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Etap 3 (redukuję przekształconą macierz główną do macierzy jednostkowej).

```
B_u:matrix([1/6,0,0,0],[0,−1/4,0,0],[0,0,1/2,0],[0,0,0,−1/3]).B_u;
```

$$(B\_u)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{251}{72} & \frac{155}{72} & -\frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{199}{24} & -\frac{115}{24} & \frac{17}{12} & -\frac{7}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{143}{12} & -\frac{83}{12} & \frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{3} & -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Wypisuję macierz odwrotną skreslając pierwsze cztery kolumny.

→ C:submatrix(B_u,1,2,3,4);

(C) $$\begin{pmatrix} -\frac{251}{72} & \frac{155}{72} & -\frac{25}{36} & \frac{11}{36} \\ \frac{199}{24} & -\frac{115}{24} & \frac{17}{12} & -\frac{7}{12} \\ \frac{143}{12} & -\frac{83}{12} & \frac{13}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{11}{3} & -\frac{13}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Jest to macierz odwrotna do B, ale dla pewności zróbmy jeszcze sprawdzenie.

→ B.C;
C.B;

(%o18) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%o19) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 5.

Wyznaczamy rozkład LU macierzy A. W tym celu zapisuję macierz A i stosuję podstawową eliminację Gaussa.

→ A:matrix([4,1,0],[1,4,1],[0,1,4]);

(A) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

→ A: rowop(A,2,1,1/4);

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

→ A:rowop(A,3,2,4/15);

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix}$

Macierz U będzie przekształcona macierzą A (górną trójkątną).

→ U:A;

(U) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix}$

Macierz L tworzymy w nastepujący sposób: w miejsce zer pod przekątną w przekszałconej macierzy A wstawiamy współczynniki, których użyliśmy do zerowania; na przekątnej jedynki; nad przekątną zera.

→ L: matrix([1,0,0],[1/4,1,0],[0,4/15,1]);

(L) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix}$

Można zrobić sprawdzenie. Musi zachodzić: A=L.U

→ L.U;

(%o7) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Wprowadzam kolumnę wyrazów wolnych.

```
--> B:matrix([6],[12],[14]);
```

(B) $$\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Krok 1. Rozwiązuję układ: LY=B.

```
--> Y:matrix([y1],[y2],[y3]);
```

(Y) $$\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$$

```
--> L.Y=B;
```

(%o10) $$\begin{pmatrix} y1 \\ y2+\frac{y1}{4} \\ y3+\frac{4\,y2}{15} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Z pierwszego mam y1=6. Wstawiam do do drugiego i obliczam y2.

```
--> solve(y2+6/4=12);
```

(%o11) $$[y2=\frac{21}{2}]$$

Wstawiam do trzeciego i obliczam y3.

```
--> solve(y3+4/15·21/2=14);
```

(%o12) $$[y3=\frac{56}{5}]$$

```
--> y1:6;
y2:21/2;
y3:56/5;
```

(y1) 6

(y2) $\frac{21}{2}$

(y3) $\frac{56}{5}$

```
--> ''(Y);
```

(%o17) $\begin{pmatrix} 6 \\ \frac{21}{2} \\ \frac{56}{5} \end{pmatrix}$

Krok 2. Rozwiązuję układ: UX=Y.

```
--> X:matrix([x1],[x2],[x3]);
```

(X) $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$

```
--> U.X=''(Y);
```

(%o21) $\begin{pmatrix} x2+4\,x1 \\ x3+\frac{15\,x2}{4} \\ \frac{56\,x3}{15} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ \frac{21}{2} \\ \frac{56}{5} \end{pmatrix}$

Z trzeciego równania mamy: x3=3. Wstawiam do drugiego i wyznaczam x2.

```
--> solve(3+15/4·x2=21/2);
```

(%o22) $[x2=2]$

Wstawiam do pierwszego i obliczam x1.

```
--> solve(2+4·x1=6);
```

(%o23) $[x1=1]$

Mamy rozwiązanie: x1=1, x2=2, x3=3.

```
--> kill(all);
```

(%o0) *done*

Ćwiczenie 6.

Wprowadzam macierz główną układu

```
→ A:matrix([6,−2,2,4],[12,−8,6,10],[3,−13,9,3],[−6,4,1,−18]);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

i stosuję eliminację Gaussa w przód.

```
→ A:rowop(A,2,1,2);
A:rowop(A,3,1,1/2);
A:rowop(A,4,1,−1);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{pmatrix}$$

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix}$$

```
→ A:rowop(A,3,2,3);
A:rowop(A,4,2,−1/2);
```

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{pmatrix}$$

(A) $$\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

```
A:rowop(A,4,3,2);
```

(A) $$\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\0 & -4 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & -5\\0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Zapisuję macierz U

```
U:A;
```

(U) $$\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\0 & -4 & 2 & 2\\0 & 0 & 2 & -5\\0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

i tworzę macierz L.

```
L:matrix([1,0,0,0],[2,1,0,0],[1/2,3,1,0],[−1,−1/2,2,1]);
```

(L) $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0\\\frac{1}{2} & 3 & 1 & 0\\-1 & -\frac{1}{2} & 2 & 1\end{pmatrix}$$

Zróbmy sprawdzenie.

```
L.U;
```

(%o10) $$\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & 4\\12 & -8 & 6 & 10\\3 & -13 & 9 & 3\\-6 & 4 & 1 & -18\end{pmatrix}$$

Krok 1. Rozwiązuję układ LY=B

```
→ Y:matrix([y1],[y2],[y3],[y4]);
  B:matrix([12],[34],[27],[−38]);
```

(Y) $\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \\ y4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}$

```
→ L.Y=B;
```

(%o13) $\begin{pmatrix} y1 \\ y2+2\,y1 \\ y3+3\,y2+\frac{y1}{2} \\ y4+2\,y3-\frac{y2}{2}-y1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{pmatrix}$

```
→ y1:12;
```

(y1) 12

```
→ solve(y2+2·12=34);
```

(%o15) $[y2=10]$

```
→ y2:10;
```

(y2) 10

```
→ solve(y3+3·10+12/2=27);
```

(%o17) $[y3=-9]$

```
→ y3:−9;
```

(y3) −9

```
→ solve(y4+2·(−9)−10/2−12=−38);
```

(%o19) $[y4=-3]$

```
→ y4:−3;
```

(y4) −3

Krok 2. Rozwiązuję układ UX=Y.

```
X:matrix([x1],[x2],[x3],[x4]);
```

(X) $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$

```
U.X=''(Y);
```

(%o22) $\begin{pmatrix} 4\,x4+2\,x3-2\,x2+6\,x1 \\ 2\,x4+2\,x3-4\,x2 \\ 2\,x3-5\,x4 \\ -3\,x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Z ostatniego mamy x4=1.

```
solve(2·x3−5·1=−9);
```

(%o24) $[x3=-2]$

```
solve(2·1+2·(−2)−4·x2=10);
```

(%o25) $[x2=-3]$

```
solve(4·1+2·(−2)−2·(−3)+6·x1=12);
```

(%o26) $[x1=1]$

Mamy rozwiązanie: x1=1, x2=-3, x3=-2, x4=1.