Metoda potęgowa dla zadania własnego

Wykład

- Zadanie własne
- Metoda potęgowa
- Odwrotna metoda potęgowa
- Odwrotna metoda potęgowa z przesunięciem

Zadanie własne

Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n o elementach zespolonych, a λ liczbą zespoloną. Jeśli równanie

$$Ax = \lambda x$$

jest spełnione przez pewien niezerowy wektor kolumnowy x (o n składowych), to mówimy, że λ jest *wartością własną*, a x *wektorem własnym* macierzy A, odpowiadającym tej wartości własnej.

Istnienie nietrywialnego (niezerowego) rozwiązania równania

$$Ax = \lambda x$$

jest równoważne każdemu z trzech poniższych warunków:

1. macierz $A - \lambda I$ przekształca pewien wektor niezerowy na 0,

2. $A - \lambda I$ jest osobliwa,

3. $\det(A - \lambda I) = 0$.

Ostatnie równanie nazywamy *równaniem charakterystycznym*.

Równoważność powyższych warunków oznacza, że obliczanie wartości własnych macierzy można sprowadzić do rozwiązywania równania charakterystycznego. Równanie to możemy zapisać w bardziej konkretnej postaci:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Lewa strona tego równania jest wielomianem stopnia n względem λ, zwanym *wielomianem charakterystycznym* macierzy A. Stąd wniosek, że dowolna macierz kwadratowa stopnia n ma dokładnie n wartości własnych, gdy każdą z nich liczymy tyle razy, ile wynosi krotność pierwiastka równania charakterystycznego.

Ćwiczenie 1. *Znaleźć wartości własne macierzy:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1. *Jeżeli A jest macierzą symetryczną ($A = A^T$), wtedy wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste.*

Ćwiczenie 2. *Znaleźć wartości własne macierzy A oraz odpowiadające im wektory własne:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 1. Należy zauważyć, że przedstawiony wyżej, bezpośredni sposób obliczania wartości własnych jest sensowny jedynie w obliczeniach ręcznych dla macierzy niskiego stopnia. W obliczeniach numerycznych nie zaleca się stosowania tego sposobu dlatego, że pierwiastki wielomianów mogą być bardzo czułe na zmiany jego współczynników, spowodowane np. błędami zaokrągleń.

Metoda potęgowa

Podstawową metodą numeryczną dla zadania własnego jest *metoda potęgowa*. Daje ona możliwość przybliżenia, z zadaną dokładnością, wartości własnej o największym module i odpowiadającego jej wektora własnego.

Metoda działa bez zakłóceń, jeżeli macierz ma następujące własności:

1. Tylko jedna jej wartość własna (rzeczywista lub zespolona) ma największy moduł.

2. Istnieje układ n wektorów własnych liniowo niezależnych czyli macierz ma *prostą strukturę*.

Metodę potęgową możemy przedstawić w postaci następującej procedury iteracyjnej:

$$
\begin{aligned}
x_0 - & \text{ wektor początkowy,} \\
x_{n+1} &= Ax_n, \\
r_n &= \frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi(x_n)},
\end{aligned}
$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza dowolny funkcjonał liniowy określony na $\mathbb{C}^n$. Funkcjonał taki musi mieć następującą własność:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$$

dla dowolnych liczb α, β i wektorów x, y. Prostym przykładem takiego funkcjonału może być: $\varphi(x) = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (φ zwraca wybraną składową wektora x).

Przy wielokrotnym powtarzaniu powyższej procedury, wielkość r_n przybliża wartość własną o największym module, a wielkość x_{n+1} przybliża odpowiadający jej wektor własny.

Kryterium stopu

Jako kryterium zakończenia iterowania powyższej procedury przyjmujemy:

$$\|Ax_{n+1} - r_n x_{n+1}\| \leq \mathsf{tol},$$

gdzie tol jest z góry przyjętą dokładnością, np. $\mathsf{tol} = 10^{-8}$.

Innym kryterium stopu może być osiągnięcie maksymalnej liczby iteracji.

Uwaga 2. W literaturze często metodę potęgową wiąże się z konkretnym funkcjonałem φ takim, że

$$r_n = \frac{(x_n, x_{n+1})}{(x_n, x_n)},$$

gdzie (x, y) oznacza iloczyn skalarny wektorów x, y.

Jest to tzw. *iloraz Rayleigha* zapewniający dla macierzy symetrycznych nieco lepsze działanie metody potęgowej.

Zauważmy, że jeżeli x jest wektorem własnym macierzy A, to wówczas iloraz Rayleigha daje odpowiadającą mu wartość własną, tzn.

$$\frac{(x_n, x_{n+1})}{(x_n, x_n)} = \frac{(x_n, Ax_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{(x_n, \lambda x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\lambda(x_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \lambda.$$

Ćwiczenie 3. *Dana jest macierz*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Wyznacz jej wartości własne rozwiązując równanie charakterystyczne, a następnie stosując metodę potęgową dla wektora początkowego $[1, 1]$, *z dokładnością do* 0.001.

Odwrotna metoda potęgowa

W konstrukcji algorytmu odwrotnej metody potęgowej kluczową rolę odgrywa następująca elementarna własność dotycząca wartości własnych macierzy.

Twierdzenie 2. *Jeżeli λ jest wartością własną nieosobliwej macierzy A, to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1}.*

Dowód. Jeżeli $Ax = \lambda x$ i $x \neq 0$, to $x = A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1} x$. Dzieląc obustronnie ostatnie równanie przez λ otrzymujemy:

$$A^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

co oznacza, że λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1}.

Powyższe twierdzenie sugeruje metodę obliczenia najmniejszej wartości własnej macierzy A. Załóżmy, że mamy

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

Zważywszy na fakt, że 0 nie jest wartością własną, macierz A nie może być osobliwa.

Wartości własne macierzy A^{-1} równe λ_j^{-1} spełniają zatem nierówność:

$$\left|\lambda_n^{-1}\right| > \left|\lambda_{n-1}^{-1}\right| \geqslant \cdots \geqslant \left|\lambda_1^{-1}\right| > 0.$$

Dzięki temu możemy obliczyć λ_n^{-1} (tzn. odwrotność najmniejszej wartości własnej macierzy A), stosując metodę potęgową do macierzy A^{-1}.

Odwrotna metoda potęgowa z przesunięciem

Odwrotna metoda potęgowa z przesunięciem pozwala obliczać przybliżenia wartości własnych pośrednich - leżących pomiędzy wartościami własnymi o największym i najmniejszym module.

Metoda ta polega na zastosowaniu odwrotnej metody potęgowej do tzw. *macierzy przesuniętej*, tj. macierzy: $A - \mu I$. Operując taką macierzą można znaleźć wartość własną macierzy A, najbliższą danej liczby μ.

Macierz $A - \mu I$ ma wartości własne postaci: $\lambda_j - \mu$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, więc stosując do niej odwrotną metodę potęgową, możemy znaleźć przybliżenie wielkości: $(\lambda_k - \mu)^{-1}$, a stąd możemy już obliczyć przybliżenie wartości własnej λ_k.

Uwaga 3. Zastosowanie zwykłej metody potęgowej do macierzy przesuniętej prowadzi do wyznaczenia przybliżenia wartości własnej macierzy A, najdalszej od danej liczby μ. W związku z tym, jeżeli macierz A ma tylko rzeczywiste wartości własne, stosując taki algorytm, możemy otrzymać tylko skrajne wartości własne (tzn. najmniejszą i największą), ponieważ one będą zawsze najbardziej oddalone.