Pochodna funkcji

Wykład

- Podstawowe pojęcia

- Twierdzenia o pochodnej funkcji

- Różniczka funkcji

Definicja 1. (*przyrost zmiennej i przyrost funkcji*)
Różnicę

$$x - x_0 =: \triangle x$$

nazywamy przyrostem zmiennej rzeczywistej x, a odpowiadający przyrostowi $\triangle x$ przyrost

$$\triangle f = f(x) - f(x_0)$$

nazywamy przyrostem funkcji f.

Definicja 2. (*iloraz różnicowy*)
Iloraz przyrostów

$$\frac{\triangle f}{\triangle x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

nazywamy ilorazem różnicowym funkcji f.

Definicja 3. (*pochodna funkcji w punkcie*)
Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę ilorazu różnicowego przy $x \to x_0$, tzn.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\triangle f}{\triangle x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jeżeli granica taka nie istnieje, to funkcja w tym punkcie nie ma pochodnej. Pochodną funkcji $y = f(x)$ oznaczamy:

$$y', \quad f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \dot{y}$$

Pierwsze dwa symbole wprowadził Lagrange[*]*, trzeci i czwarty symbol - Leibniz*[†]*, ostatni stosowany w mechanice - Newton*[‡]*.*

[*]Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) - matematyk francuski.

[†]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) - filozof i matematyk niemiecki

[‡]Isaac Newton (1642-1727) - fizyk, astronom i matematyk angielski

Uwaga 1. Pochodna funkcji w punkcie x_0 jest równa tangensowi kąta α, który tworzy styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 z dodatnią częścią osi OX.

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna pochodnej.*

Uwaga 2. Odnajdywanie pochodnej funkcji nazywa się *różniczkowaniem funkcji*. Dział matematyki traktujący o pochodnych, ich własnościach i zastosowaniach nazywamy *rachunkiem różniczkowym*.

Definicja 4. (*funkcja różniczkowalna w punkcie*)
Funkcję f nazywamy różniczkowalną w punkcie x_0, jeżeli istnieje pochodna funkcji $f'(x_0)$ w punkcie x_0.

Definicja 5. (*funkcja różniczkowalna na zbiorze*)
Funkcję, która jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru nazywamy funkcją różniczkowalną na tym zbiorze.

Ćwiczenie 1. *Wyznacz pochodne podanych funkcji:*

a) $y = x$;

b) $y = x^2$;

c) $y = x^3$;

d) $y = \sin x$;

e) $y = e^x$.

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych

1. $(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}, \quad x > 0,\ a \in \mathbb{R}$
3. $(\sin x)' = \cos x$
4. $(\cos x)' = -\sin x$
5. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos x \neq 0$
6. $(\mathrm{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}, \quad \sin x \neq 0$

7. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$

8. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,\ 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$

9. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \mathrm{arctg} x < \frac{\pi}{2}$

10. $(\mathrm{arcctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}, \quad 0 < \mathrm{arcctg} x < \pi$

11. $(e^x)' = e^x$

12. $(a^x) = a^x \ln x, \quad a > 0$

13. $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$

14. $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1,\ x \neq 0$

W szpitalu psychiatrycznym wybucha zamieszanie. Wszyscy pacjenci gdzieś uciekają, tylko jeden chory siedzi spokojnie na ławce. Podbiega do niego kolega i krzyczy:

- Uciekaj! Przyjechali lekarze i wszystkich różniczkują!

Na co ten spokojnie odpowiada:

- Nie boję się. Jestem e^x.

Twierdzenie 1. *(*o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu*)*
Jeżeli funkcje f i g mają pochodne w punkcie x, to
1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$*;*
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$*;*
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$*;*
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, *o ile* $g(x) \neq 0$*.*

Ćwiczenie 2. *Obliczyć pochodne podanych funkcji:*

a) $f(x) = x^5 + 4x^3 - 6x^2 - \frac{2}{x} + \sqrt{x}$;

b) $g(x) = x^2 \ln x$;

c) $h(x) = \frac{e^x}{\sin x}$;

d) $s(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

Twierdzenie 2. *(*o pochodnej funkcji złożonej*)*
Jeżeli
1. funkcja f ma pochodną w punkcie x,
2. funkcja g ma pochodną w punkcie $f(x)$,
to

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ćwiczenie 3. *Obliczyć pochodne podanych funkcji:*
a) $f(x) = \cos^3 x$;
b) $g(x) = (3x^2 + 2x - 10)^4$;
c) $h(x) = e^{\sin^2 x}$;
d) $s(x) = \dfrac{1}{\cos^3 \sqrt{x^3 - 1}}$.

Ćwiczenie 4. *Obliczyć pochodne podanych funkcji:*
a) $f(x) = x^{x^2}$;
b) $g(x) = x^{\sin x}$.

Ćwiczenie 5. *Ropa z uszkodzonego tankowca wycieka ze stałą prędkością* $V = 10\frac{m^3}{min}$ *i tworzy plamę kołową o grubości* $d = 2mm$. *Obliczyć, z jaką prędkością będzie powiększała się średnica plamy ropy w chwili, gdy będzie miała średnicę* $D = 1000m$.

Ćwiczenie 6. *Do czaszy w kształcie półkuli o promieniu* $R = 20cm$ *wlewa się jednostajnie woda z prędkością* $V = 100\frac{cm^3}{sek}$. *Obliczyć prędkość, z jaką będzie podnosił się poziom wody* h *w czaszy na początku i pod koniec napełniania. (Przypomnijmy, że objętość odcinka kuli wyraża się wzorem:* $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$*)*

Twierdzenie 3. *(*równanie stycznej do wykresu funkcji*)*
Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest postaci:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ćwiczenie 7. *Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:*
a) $f(x) = e^x$, $(0, 1)$;
b) $g(x) = \sin x$, $(\pi, 0)$.

Ćwiczenie 8. *Dane są punkty* $A = (2, -1)$ *oraz* $B = (4, 3)$. *Na wykresie funkcji* $y = x^2 + 1$ *znaleźć punkt* C *taki, aby pole trójkąta* ABC *było najmniejsze.*

Ćwiczenie 9. *Na krzywej będącej wykresem funkcji* $y = \dfrac{1}{x+1}$ *znaleźć punkt mający własność, że odcinek stycznej poprowadzonej w tym punkcie tworzy z osiami układu współrzędnych trójkąt o polu* $S = 2$.

Definicja 6. (*różniczka funkcji*)
Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\triangle x = x - x_0$ określoną wzorem:

$$df(\triangle x) := f'(x_0)\triangle x.$$

Rysunek 2. *Różniczka funkcji.*

Twierdzenie 4. *(*zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych*)*
Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to

$$f(x_0 + \triangle x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\triangle x.$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji f

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\triangle x$, dąży szybciej do zera niż przyrost zmiennej x, tzn.

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f - df}{\triangle x} = 0.$$

Ćwiczenie 10. *Obliczyć przybliżone wartości funkcji:*

a) $\sqrt[4]{15.96}$

b) $\arctan 1.05$

c) $e^{-0.001}$

d) $\ln 1.004$.

Ćwiczenie 11. *Sześcienna kostka lodu ma objętość $V = 8cm^3$. Obliczyć w przybliżeniu, o ile zmniejszyła się krawędź kostki, jeżeli stopiło się $0.3cm^3$ lodu.*

Ćwiczenie 12. *Koła ma średnicę równą $2m$. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole koła, jeżeli jego średnica wzrośnie o $3cm$.*

Twierdzenie 5. *(*zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędu pomiaru*)*
Niech wielkości fizyczne x i y będą związane zależnością $y = f(x)$. Załóżmy, że istnieje pochodna $f'(x_0)$, gdzie x_0 jest wynikiem pomiaru wielkości x. Ponadto niech $\triangle_x$ oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości x. Wtedy błąd bezwzględny $\triangle_y$ obliczanej wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym:

$$\triangle_y \approx \left|f'(x_0)\right| \triangle_x.$$

Ćwiczenie 13. *Krawędź sześcianu, zmierzona z dokładnością* $\pm 1mm$, *ma długość* $65mm$. *Z jaką dokładnością można obliczyć pole powierzchni tego sześcianu?*

Ćwiczenie 14. *Czas w biegu na* $100m$ *mierzy się z dokładnością* $0.01sek$. *Zawodnik uzyskał czas* $10.00sek$. *Z jaką dokładnością można obliczyć średnią prędkość tego zawodnika?*

Definicja 7. (*pochodne wyższych rzędów*)
Drugą pochodną funkcji $y = f(x)$ nazywamy pochodną pierwszej pochodnej,tzn.

$$f''(x) = \Big(f'(x)\Big)',$$

podobnie trzecią pochodną funkcji $y = f(x)$ nazywamy pochodną drugiej pochodnej, itd.

$$f'''(x) = \Big(f''(x)\Big)',$$

$$f^{(4)}(x) = \Big(f'''(x)\Big)',$$

$$f^{(n)}(x) = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)'.$$

Pochodne wyższych rzędów funkcji $y = f(x)$ oznaczamy również symbolami: $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}, \ddot{y};\quad \dfrac{d^3 f(x)}{dx^3}, \dddot{y}$, itd.

Ćwiczenie 15. *Obliczyć pochodne f', f'', f''' podanych funkcji:*
a) $f(x) = e^{x^2}$;
b) $g(x) = x \ln x$;
c) $h(x) = \sin^3 x$.