Rozwiązywanie równań nieliniowych

Wykład 1

- Metoda bisekcji
- Metoda Newtona
- Metoda siecznych

Wprowadzenie.

Podstawowym zagadnieniem znanym z algebry jest znajdowanie pierwiastków równania

$$f(x) = 0,$$

tzn. takiego argumentu, który daje wartość zero (spełnia równanie). Mówiąc bardziej dokładnie, jeżeli funkcja jest zdefiniowana jako

$$y = f(x),$$

szukamy takiego argumentu α, że

$$f(\alpha) = 0.$$

Argument α będziemy nazywywać *miejscem zerowym* funkcji f lub *pierwiastkiem* (*rozwiązaniem*) równania $f(x) = 0$.

Twierdzenie 1. *(*Własność Darboux funkcji ciągłych*)*
Funkcja ciągła f w przedziale $[a, b]$ przyjmuje w nim wszystkie wartości zawarte między $f(a)$ i $f(b)$.

Metoda bisekcji (połowienia przedziału)

Niech $y = f(x)$ będzie daną funkcją. Przypuśćmy, że możemy stwierdzić następujący fakt

$$f(a)f(b) < 0.$$

Oznacza to, że f jest ujemne w jednym punkcie (a lub b) i dodatnie w drugim. Jeżeli ponadto f jest funkcją ciągłą, wówczas na podstawie własności Dorboux wiemy, że istnieje taki argument pomiędzy a i b (oznaczmy go α) dla którego f przyjmuje wartość zero. Innymi słowy istnieje pierwiastek $\alpha \in [a, b]$ dla którego mamy

$$f(\alpha) = 0.$$

(Uwaga: W przedziale $[a, b]$ może być więcej niż jeden pierwiastek.)

Użyjmy teraz powyższego pomysłu do znalezienia pierwiastka α. Niech c będzie środkiem przedziału $[a, b]$, tzn.

$$c = \frac{1}{2}(a + b).$$

Przyjrzyjmy się iloczynowi $f(a)f(c)$.
Mamy trzy możliwości:

1. $f(a)f(c) < 0$. Oznacza to, że ten pierwiastek (być może więcej niż jeden) znajduje się pomiędzy a i c, tzn. $\alpha \in [a, c]$;

2. $f(a)f(c) = 0$. Wiemy już, że $f(a) \neq 0$, zatem musi być $f(c) = 0$. Oznacza to, że znaleźliśmy pierwiastek, mianowicie $\alpha = c$.

3. $f(a)f(c) > 0$. Oznacza to, że pierwiastek musi leżeć w drugiej połowie przedziału, tzn. $\alpha \in [c, b]$.

Jeżeli zachodzi przypadek 1 lub 3 mamy wówczas pierwiastek zlokalizowany w przedziałach $[a, c]$ lub $[c, b]$, które są o połowę krótsze od wyjściowego przedziału $[a, b]$.

Jeżeli powtórzymy ten proces ponownie otrzymamy krótszy o połowę przedział lokalizujący pierwiastek.

Kontynuując to postępowanie możemy zlokalizować pierwiastek z dowolną, wybraną z góry dokładnością, tzn. otrzymać przedział lokalizujący dowolnie małej długości.

Kryterium stopu (zakończenia obliczeń)

Jeżeli zachodzi przypadek 2, to pierwiastek jest znaleziony.
W praktyce ten przypadek ma rzadko miejsce. W związku z tym nie prowadzimy obliczeń, aż do otrzymania

$$f(c) = 0,$$

ale dopuszczamy pewną tolerancję, np. kończymy obliczenia, gdy mamy

$$|f(c)| < 10^{-8}.$$

Innym kryterium zakończenia obliczeń może być dostatecznie mała długość przedziału lokalizacyjnego lub osiągnięcie maksymalnej dopuszczonej liczby powtórzeń.

Ćwiczenie 1. *Wyznaczyć miejsce zerowe funkcji* $f(x) = 2 - e^x$ *zaczynając poszukiwania od przedziału* $[0, 1]$*, z dokładnością do* 10^{-4}*.*

Ćwiczenie 2. *Wyznaczyć pierwiastek równania* $e^x = \sin x$ *najbliższy 0 z dokładnością do* 10^{-4}*.*

Zbieżność i błąd metody bisekcji

Twierdzenie 2. *Niech* $[a_0, b_0] = [a, b]$ *będzie początkowym przedziałem z* $f(a)f(b) < 0$ *i niech przedziały* $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$ *będą utworzone metodą bisekcji. Zdefiniujmy przybliżony pierwiastek jako*

$$x_n = c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Wtedy istnieje dokładny pierwiastek $\alpha \in [a, b]$ *funkcji* f *taki, że*

$$|\alpha - x_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a).$$

Ponadto, aby osiągnąć dokładność

$$|\alpha - x_n| \leqslant \varepsilon,$$

wystarczy wziąć

$$n \geqslant \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log 2}.$$

Ćwiczenie 3. *Niech metoda bisekcji startuje od przedziału* $[50, 63]$*. Ile co najwyżej kroków trzeba wykonać, aby otrzymać pierwiastek z dokładnością* 10^{-12}*.*

Metoda Newtona (metoda stycznych)

Klasyczna metoda znajdowania pierwiastków funkcji. Historycznie po raz pierwszy użyta przez Izaaca Newtona w 1669 roku, choć sama idea była znana już wcześniej Josephowi Raphsonowi (dlatego metoda bywa nazywana metodą Newtona-Raphsona). Starożytni Babilończycy znali algorytm przybliżania pierwiastków kwadratowych z liczby dodatniej, co do istoty oparty na tym rozumowaniu.

Metoda Newtona z definicji zaczyna od przyjęcia (wytypowania) pierwszego przybliżenia x_0 pierwiastka α funkcji f i polega na rekurencyjnym stosowaniu wzoru

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dla $n \geqslant 0$.

Kryterium stopu

Do pomiaru zbieżności metody możemy użyć wielkości $|x_n - x_{n-1}|$. Zazwyczaj kończymy iterowanie, kiedy ta wielkość jest odpowiednio mała, np.

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-12}.$$

W praktyce może się zdarzyć, że mamy $|x_n - x_{n-1}|$ małe, a jednocześnie x_n jest niezbyt bliskie α. Może to mieć miejsce, gdy $f'(x_n)$ jest bardzo duże w porównaniu z $f(x_n)$. Z tego powodu często dodaje się składnik zapewniający, że sama wartość funckcji jest również mała, tzn. kończymy obliczenia kiedy

$$|f(x_n)| + |x_n - x_{n-1}| \leqslant 10^{-12}.$$

Innym kryterium może być osiągnięcie maksymalnej dopuszczonej liczby iteracji.

Ćwiczenie 4. *Zastosować metodę Newtona do znalezienia pierwiastka funkcji* $f(x) = 2 - e^x$ *z dokładnością do* 10^{-8}*. Przyjąć pierwsze przybliżenie* $x_0 = 0$*.*

Ćwiczenie 5. *Stosując metodę Newtona znaleźć ujemny pierwiastek funkcji* $g(x) = e^x - 1.5 - \arctan x$ *z dokładnością do* 10^{-12}*.*

Zbieżność i błąd metody Newtona

Twierdzenie 3. *Niech α będzie pojedynczym miejscem zerowym funkcji f i niech jej druga pochodna f'' będzie ciągła. Wtedy istnieje takie otoczenie punktu α i taka stała C, że jesli metoda Newtona startuje z tego otoczenia, to jej kolejne punkty sa coraz bliższe α i takie, że*

$$\left|x_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \left|C(x_n - \alpha)^2\right|$$

dla $n \geqslant 0$.

W pewnych przypadkach metoda Newtona jest zbieżna dla dowolnego punktu początkowego.

Twierdzenie 4. *Jeżeli $f \in C^2(\mathbb{R})$ jest rosnąca, wypukła i ma miejsce zerowe, to jest ono jedyne, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego punktu początkowego.*

Ćwiczenie 6. *Obliczyć $\sqrt{26}$. Porównać ze wzorem Herona:*

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right).$$

Metoda siecznych

Wadą metody Newtona jest to, że wymaga ona wzoru na pochodną funkcji f. W praktyce zdarzają się sytuacje w których obliczenie pochodnej może być trudne albo nieopłacalne. Jednym ze sposobów poradzenia sobie z tym problemem jest zastąpienie pochodnej we wzorze Newtona jej przybliżeniem, mianowicie

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Ta równość przybliżona, która wynika wprost z definicji pochodnej, prowadzi do metody siecznych danej wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]$$

dla $n \geqslant 1$.

Zbieżność i błąd metody siecznych

Twierdzenie 5. *Niech* f *będzie podwójnie różniczkowalna w sposób ciągły w pewnym otoczeniu pierwiastka* α*, ponadto załóżmy, że* $f'(x) \neq 0$ *dla wszystkich* x *z tego otoczenia. Wtedy dla* x_0 *i* x_1 *dostatecznie bliskich* α *metoda siecznych daje ciąg zbieżny do* α *taki, że*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = 0$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^p} = \left(\frac{1}{2}\frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\right)^{p-1}$$

dla $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots.$

Zauważmy, że $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62 < 2$ co oznacza, że metoda siecznych jest wolniej zbieżna od metody Newtona, ale szybciej od metody bisekcji. Zaletą metody siecznych jest to, że każdy krok tej metody wymaga obliczenia tylko jednej wartości funkcji, tzn. $f(x_n)$. W metodzie Newtona trzeba obliczyć dwie takie wartości w każdym kroku, mianowicie $f(x_n)$ i $f'(x_n)$.

W metodzie siecznych możemy zastosować te same kryteria zakończenia obliczeń jak w metodzie Newtona.

Ćwiczenie 7. *Zastosować metodę siecznych do znalezienia miejsca zerowego funkcji* $f(x) = 2 - e^x$ *dla punktów początkowych* $x_0 = 0$ *i* $x_1 = 1$.

Ćwiczenie 8. *Znaleźć metodą siecznej najbliższy zera i dodatni pierwiastek równania* $\tan x - 30x = 0$ *z dokładnością do* 10^{-12}.