Szeregi liczbowe

Wykład

- Uwagi ogólne o szeregach

- Szeregi o wyrazach nieujemnych

- Szeregi przemienne

Przykład 1. *Dany kwadrat o polu powierzchni równym 1 podzielmy na dwie równe części. Pole powierzchni jednej z nich oznaczmy przez a_1, a drugą podzielmy znów na równe części. Pole powierzchni jednej z nich oznaczmy przez a_2, a drugą podzielmy znów na równe części i tak dalej. Otrzymujemy nieskończony ciąg prostokątów o polach powierzchni $a_n = \frac{1}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. (Rys.) Utwórzmy sumę otrzymanych prostokątów:*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

i zauważy, że operacji dodawania, ze względu na nieskończoną liczbę składników, nie można efektywnie wykonać dodając kolejne składniki. Z drugiej strony, ze względu na konstrukcję ciągu (a_n), nietrudno spostrzec, że po dodaniu wszystkich jego wyrazów suma wyniesie 1. Przykład ten prowadzi do pojęcia szeregu i jego sumy.

Definicja 1. (*nieskończony szereg liczbowy*)
Przez szereg liczbowy nieskończony oznaczony symbolem

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots \quad \text{lub} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

rozumiemy ciąg sum:

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1, \\
&s_2 = a_1 + a_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .
\end{aligned}$$

Liczby $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *wyrazami szeregu*, a symbol a_n nazywamy *wyrazem ogólnym szeregu*. Wyrazy ciągu (s_n) nazywamy *sumami częściowymi* szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicja 2. (*szereg zbieżny*) Mówimy, że szereg jest zbieżny, jeżeli ciąg sum częściowych (s_n) jest zbieżny do granicy właściwej s, którą wówczas nazywamy sumą szeregu. Stosujemy oznaczenia:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{lub} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

Szereg który nie jest zbieżny, nazywamy szeregiem rozbieżnym.

Twierdzenie 1. (warunek konieczny zbieżności szeregu) *Warunkiem koniecznym zbieżności każdego szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest to, aby jego wyraz ogólny dążył do zera, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Twierdzenie 2. *(*o wyłączaniu stałej przed szereg*)*

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny i jego suma równa się* s, *a* c *jest liczbą stałą, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *jest zbieżny i jego suma jest równa* cs. *Jeżeli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to przy* $c \neq 0$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ *jest też rozbieżny.*

Przykład 2. *Szereg geometryczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \quad \textit{czyli} \quad a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \ldots$$

jest zbieżny, gdy $|q| < 1$ *i wówczas suma jego wynosi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}.$$

Szereg geometryczny jest natomiast rozbieżny, gdy $|q| \geqslant 1$.

Przykład 3. *Szereg harmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{czyli} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots$$

jest rozbieżny do ∞.

Przykład 4. *Szereg harmoniczny rzędu* α

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \text{czyli} \quad 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \ldots,$$

gdzie $\alpha > 0$ *jest dla* $\alpha > 1$ *zbieżny, a dla* $\alpha \leqslant 1$ *jest rozbieżny. Dla* $\alpha = 1$ *otrzymujemy szereg harmoniczny.*

Twierdzenie 3. *(kryterium Cauchy'ego*)*
Dla szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *o nieujemnych wyrazach przyjmijmy:*

$$p := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Jeżeli

- $p < 1$, *to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*
- $p > 1$, *to szereg ten jest rozbieżny;*
- $p = 1$, *to szereg ten może być zbieżny albo rozbieżny.*

*Augustin Louis Cauchy (1789-1857) - matematyk francuski.

Twierdzenie 4. *(kryterium d'Alemberta*)*
Dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o dodatnich wyrazach przyjmijmy:*

$$p := \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Jeżeli

- $p < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*

- $p > 1$, *to szereg ten jest rozbieżny;*

- $p = 1$, *to szereg ten może być zbieżny albo rozbieżny.*

*Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) - filozof i matematyk francuski.

Ćwiczenie 1. *Zbadać zbieżność szeregu:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 e^n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$;

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n-1}\right)^{n^2}$.

Twierdzenie 5. *(*kryterium porównawcze*)*

Jeżeli dla dowolnych dwóch szeregów o wyrazach nieujemnych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *istnieje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takie, że*

$$a_n \leqslant b_n \quad \textit{dla } n \geqslant n_0,$$

to ze zbieżności szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *wynika zbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i z rozbieżności szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *wynika rozbieżność szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Uwaga 1. Przy stosowaniu kryterium porównawczego do badania zbieżności niektórych szeregów pomocne będą następujące nierówności:

a) $\frac{x}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ dla $x \in [0, 2]$,

b) $\frac{x}{2} \leqslant \sin x \leqslant x$ dla $x \in [0, \frac{3\pi}{4}]$,

c) $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{2})$,

d) $x \leqslant \tan x \leqslant 2x$ dla $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$.

Ćwiczenie 2. *Zbadaj zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \tan \frac{1}{3^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\tan \frac{1}{n}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$; *d)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$.

Definicja 3. (*szereg przemienny*)
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy przemiennym, jeżeli jego wyrazy są naprzemian dodatnie i ujemne.

Twierdzenie 6. *(*kryterium Leibniza[*]*)*
Jeżeli w szeregu przemiennym $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *począwszy od pewnego miejsca* n_0 *bezwzględne wartości wyrazów szeregu dążą monotonicznie do zera, tzn. dla każdego* $n > n_0$ *spełnione są warunki:*

$$\left|a_{n+1}\right| \leqslant |a_n|,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

to szereg jest zbieżny.

[*]Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) - filozof, matematyk, prawnik i dyplomata niemiecki

Ćwiczenie 3. *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3}-1)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\sin n$.

Twierdzenie 7. *(*kryterium bezwzględnej zbieżności*)*
Jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$*, którego wyrazy równe są wartościom bezwzględnym wyrazów szeregu* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, jest zbieżny, to i szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Definicja 4. (*szereg bezwzględnie zbieżny*)
Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy szeregiem bezwzględnie zbieżnym, jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Definicja 5. (*szereg warunkowo zbieżny*)
Szeregiem warunkowo zbieżnym nazywamy szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny.

Przykład 5. *Szereg*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *jest zbieżny jako szereg harmoniczny rzędu* $\alpha = 2$.

Przykład 6. *Szereg anharmoniczny*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

jest warunkowo zbieżny. Rzeczywiście szereg ten na podstawie kryterium Leibniza jest zbieżny, a nie jest bezwzględnie zbieżny, gdyż szereg bezwzględnych wartości jego wyrazów stanowi rozbieżny szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ćwiczenie 4. *Zbadać zbieżność szeregów:*

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n-1}{2n+2}\right)^n$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$;

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$;

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log n}$.