Twierdzenia o pochodnych

Wykład

- Twierdzenia o wartości średniej
- Reguła de L'Hospitala
- Rozwinięcie Taylora funkcji

Twierdzenie 1. *(*Roll'a[*]*)*
Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b) i $f(a) = f(b)$, to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = 0.$$

Rysunek 1. *Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a.*

[*]Michel Rolle (1652-1719) - matematyk francuski

Twierdzenie 2. *(*Lagrange'a*)*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na (a, b), to istnieje taki punkt $c \in (a, b)$, że

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Rysunek 2. *Interpretacja geometryczna twierdzenia Lagrange'a.*

*Joseph Louis de Lagrange (1736-1813) - matematyk i astronom francuski

Twierdzenie 3. *(*warunki wystarczające monotoniczności funkcji*)*
Niech I oznacza dowolny przedział. Jeżeli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek:
1. $f'(x) = 0$, *to jest stała na I;*
2. $f'(x) > 0$, *to jest rosnąca na I;*
3. $f'(x) < 0$, *to jest malejąca I.*

Ćwiczenie 1. *Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:*

a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

b) $f(x) = \sin x + \cos x$;

c) $f(x) = 3x^5 + 5x^3$;

d) $f(x) = x + \cos x$.

Twierdzenie 4. *(*reguła de L'Hospitala* dla nieoznaczoności $\frac{0}{0}$*)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:
1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$*, przy czym* $g(x) \neq 0$*,*
2. istnieje granica $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*
to

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 1. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz granic w $-\infty$ lub w ∞.

*Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704) - matematyk francuski.

Ćwiczenie 2. *Obliczyć podane granice:*

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{10}-1}{x^3-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi - 2\arctan x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 2x}$.

Twierdzenie 5. *(*reguła de L'Hospitala dla nieoznaczoności $\frac{\infty}{\infty}$*)*
Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$,

2. istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(właściwa lub niewłaściwa),*

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Uwaga 2. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz granic w $-\infty$ lub w ∞.

Ćwiczenie 3. *Obliczyć podane granice:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{4x^3 + 2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \sin x}{\ln \tan x}$.

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

Nieoznaczoność	Stosowana tożsamość	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \dfrac{f}{\dfrac{1}{g}}$	$\dfrac{0}{0}$ lub $\dfrac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \dfrac{\dfrac{1}{g} - \dfrac{1}{f}}{\dfrac{1}{fg}}$	$\dfrac{0}{0}$
1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}	$f^g = e^{g \ln f}$	$0 \cdot \infty$

Uwaga 3. Tożsamość podaną dla nieoznaczoności $\infty - \infty$ stosujemy dopiero wtedy, gdy zawiodą inne sposoby jej usuwania.

Ćwiczenie 4. *Obliczyć podane granice:*

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2x\tan x}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctan} x\right)^x$.

Definicja 1. (*wielomiany Taylora*[*] *i Maclaurina*[†])
Załóżmy, że funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną rzędu k, gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wielomian

$$P_k(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

nazywamy wielomianem Taylora rzędu k funkcji f w punkcie x_0. Dla $x_0 = 0$ wielomian ten nazywamy wielomianem Maclaurina.

[*] Brook Taylor (1685-1731) - matematyk angielski.

[†] Colin Maclaurin (1698-1746) - matematyk szkocki.

Twierdzenie 6. *(*wzór Taylora z resztą Lagrange'a*)*
Jeżeli funkcja f ma wszystkie pochodne do rzędu n włączenie na przedziale $[x_0, x]$, to istnieje taki punkt $c \in (x_0, x)$, że

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Ćwiczenie 5. *Napisać wzór Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f, punktów x_0 oraz n:*

a) $f(x) = \cos x, \; x_0 = \pi, \; n = 6$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \; x_0 = 1, \; n = 3$.

Ćwiczenie 6. *Rozwinąć podane funkcje w szeregi Maclaurina:*

a) $f(x) = e^x$;

b) $g(x) = \ln(1 + x)$.