

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Wykład 4

- Algorytm Gaussa z wyborem wierszy głównych
- Metody iteracyjne: Jacobiego (iteracji prostej), Gaussa-Seidela, nadrelaksacji (SOR)

Znaczenie elementów głównych.

Algorytm Gaussa w opisanej wcześniej, najprostszej postaci, nie działa zadowalająco. Może zawodzić dla układów, których rozwiązanie można uzyskać w prosty sposób. Pokazują to poniższe przykłady.

Przykład 1. *Do układu równań*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

nie możemy zastosować eliminacji Gaussa (podstawowej czy pełnej), ponieważ na przekątnej mamy zero (element $a_{11} = 0$). Łatwo wyznaczyć rozwiązanie tego układu innymi metodami, dostajemy

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Przykład 2. Zastąpmy teraz zero z powyższego przykładu bardzo małą liczbą ε różną od zera, np. $\varepsilon = 10^{-17}$. Układ

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

możemy rozwiązać stosując, np. metodę podstawiania, wtedy

$$x_1 = \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad x_2 = \frac{1 - 2\varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

W obliczeniach komputerowych dostaniemy wtedy

$$x_2 \approx 1, \quad x_1 \approx 1.$$

Stosując podstawową eliminację Gaussa otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix},$$

a stąd

$$x_2 = \frac{2 - \varepsilon^{-1}}{1 - \varepsilon^{-1}}, \quad x_1 = (1 - x_2)\varepsilon^{-1}.$$

W obliczeniach komputerowych dostaniemy wówczas

$$x_2 \approx 1, \quad x_1 \approx 0.$$

Widać, że x_1 wyliczone metodą Gaussa jest całkowicie błędne. Powyższe dwa przykłady pokazują, że problemem jest nie tylko zero na przekątnej, ale też bardzo mała liczba w tym miejscu. W obu przypadkach problem ten można rozwiązać zamieniając wiersze.

Wybór elementów głównych

Przypomnijmy, że wyrazy macierzy znajdujące się na głównej przekątnej nazywamy elementami głównymi. Proces zamiany wierszy prowadzący do tego, że na przekątnej głównej znajdą się liczby „lepsze” z punktu widzenia eliminacji Gaussa, nazywamy *częściowym wyborem elementów głównych* lub *wyborem wierszy głównych*. Mówiąc dokładnie, stwierdzenie liczby „lepsze” oznacza tutaj liczby większe co do wartości bezwzględnej.

Przykład 3. Zastosujemy wybór wierszy głównych do ostatniego przykładu. Zamieniamy ze sobą wiersze, wtedy na przekątnej znajdzie się 1, która jest większa od ε . Zastosowanie podstawowej eliminacji Gaussa prowadzi do

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 - \varepsilon & 1 - 2\varepsilon \end{bmatrix}.$$

W obliczeniach komputerowych dostaniemy wówczas

$$x_2 \approx 1, \quad x_1 \approx 1.$$

Powyższy przykład ilustruje użyteczność wyboru wierszy głównych, nawet jeśli element główny nie jest zerem.

Przykład 4. Zastosujmy wybór wiersza głównego do zadania z pierwszego przykładu, mamy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

stąd

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.$$

Metody iteracyjne

W metodach iteracyjnych rozwiązanie układu równań uzyskujemy na zasadzie tworzenia ciągu wektorów zbieżnego do rozwiązania. Otrzymane rozwiązanie jest rozwiązaniem przybliżonym. Jako kryterium stopu stosujemy uzyskanie założonej dokładności rozwiązania przybliżonego lub osiągnięcie ustalonej liczby iteracji.

Metody iteracyjne są lepsze od metod bezpośrednich w przypadku układów dużych, złożonych z tysięcy równań. Działają znacznie szybciej i potrzebują mniej pamięci.

Metoda Jacobiego (iteracji prostej)

Niech dany będzie układ równań $AX = B$ i niech D będzie częścią diagonalną macierzy A . Iteracją Jacobiego nazywamy

$$X^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)X^{(k)} + D^{-1}B.$$

Metoda Gaussa-Seidela

Niech dany będzie układ równań $AX = B$ i niech L będzie dolną trójkątną częścią macierzy A (L zawiera przekątną!). Iteracją Gaussa-Seidela nazywamy

$$X^{(k+1)} = (I - L^{-1}A)X^{(k)} + L^{-1}B.$$

Zbieżność metod Jacobiego i Gaussa-Seidela

Macierz A nazywamy *dominującą przekątniowo*, jeżeli spełniony jest warunek

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n),$$

tzn. w każdym wierszu wartość bezwzględna elementu głównego jest większa niż suma wartości bezwzględnych pozostałych elementów.

Stosując metody iteracyjne musimy wskazać pierwsze przybliżenie rozwiązania, tzw. *rozwiązanie początkowe*, *wektor początkowy*. Dobrze jeżeli to przybliżenie jest dosyć blisko dokładnego rozwiązania, choć nie zawsze ma to znaczenie.

Twierdzenie 1. *Jeżeli macierz A jest dominująca przekątniowo, to metody Jacobiego i Gaussa-Seidela tworzą ciąg zbieżny do rozwiązania układu $AX = B$ dla dowolnego wektora początkowego.*

Metoda nadrelaksacji (SOR)

Niech dany będzie układ równań $AX = B$ i niech D będzie częścią diagonalną macierzy A , natomiast L będzie ściśle dolną trójkątną częścią macierzy A , tzn. L ma zera na przekątnej. Niech ω będzie parametrem relaksacji. Iteracją metody SOR jest

$$X^{(k+1)} = (I - Q_\omega^{-1}A)X^{(k)} + Q_\omega^{-1}B,$$

gdzie

$$Q_\omega = \left(\frac{1}{\omega}D + L \right).$$

Zbieżność metody SOR

Twierdzenie 2. *Jeżeli macierz A jest dominująca przekątniowo i $\omega \in (0, 2)$, to metoda nadrelaksacji (SOR) tworzy ciąg zbieżny do rozwiązania układu $AX = B$ dla dowolnego wektora początkowego. Jeżeli $\omega < 0$ lub $\omega > 2$, wtedy iteracja metody SOR generuje ciąg rozbieżny.*

Kryterium stopu dla metod iteracyjnych

W przedstawionych metodach iteracyjnych rozwiązanie początkowe oraz kolejne przybliżenia rozwiązania to wektory o tylu składowych ile wynosi liczba niewiadomych w układzie.

Stosując metodę Jacobiego, Gaussa-Seidela lub SOR, obliczenia kończymy kiedy największa z różnic między kolejnymi iteracjami, względem każdej składowej, będzie odpowiednio mała, np. może to być

$$\max_{i=1,\dots,n} \left| X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)} \right| \leq 10^{-8}.$$

Ćwiczenie 1. *Rozwiąż układ z pierwszej części wykładu*

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12, \end{cases}$$

stosując metodę Jacobiego, Gaussa-Seidela i SOR (z $\omega = 1.04$) dla wektora początkowego

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

uzyskując dokładność 10^{-6} .

Ćwiczenie 2. *Rozwiązać układ*

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \\ 14 \end{bmatrix}$$

stosując metodę Jacobiego, Gaussa-Seidela i SOR (z $\omega = 1.05$) dla wektora początkowego

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uzyskując dokładność 10^{-6} .