

Liczby zespolone

Wykład nr 1

- Podstawowe definicje i własności
- Postać algebraiczna i sprzężenie
- Moduł i argument
- Postać trygonometryczna
- Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Będziemy stosować następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - zbiór liczb naturalnych,

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ - zbiór liczb całkowitych,

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ - zbiór liczb wymiernych,

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych,

\mathbb{C} - zbiór liczb zespolonych.

Oznaczenia tych zbiorów pochodzą od początkowych liter wyrazów w języku angielskim i niemieckim:

Natural, Zahl, Quotient, Real, Complex.

Rysunek 1. *Relacje między zbiorami $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ i \mathbb{C} .*

Notka historyczna 1. *Pierwsze próby opisanie liczb zespolonych miały miejsce w XVI wieku. Jako pierwszy Cardano* wykorzystuje formalnie symbol $\sqrt{-1}$ do obliczania pierwiastków rzeczywistych stopnia trzeciego (patrz wzory Cardana). Liczby zespolone były odtąd stosowane do obliczeń, choć ich istnienie wywoływało liczne spory. Jak podaje Laurence Young w 1820 roku studenci inżynierii w Paryżu wznieśli bunt przeciwko liczbom zespolonym twierdząc, że są one zupełnie bezużyteczne, a ponadto w ogóle nie istnieją. Nie dziwi zatem fakt, że trzy wieki wcześniej Cardano został uwięziony po zarzucie uprawiania czarnej magii. Pierwszą ścisłą teorię liczb zespolonych podał w XIX wieku Gauss†. Jego interpretacja liczb zespolonych oraz wprowadzona symbolika są stosowane współcześnie.*

*Geronimo Cardano (1501-1576)-matematyk, filozof i lekarz włoski.

†Carl Friedrich Gauss (1777-1855)-matematyk, astronom, i fizyk niemiecki.

Definicja 1. (*liczba zespolona, płaszczyzna zespolona*)

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, np. (x, y) , (u, v) , (a, b) . Liczby zespolone oznaczamy krótko przez z , w itp. Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez \mathbb{C} (z ang. Complex). Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Uwaga 1. Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu o współrzędnych (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y) . W tej interpretacji zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną zespoloną. Wektor o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y) nazywamy *wektorem wodzącym* liczby (x, y) .

Rysunek 2. *Interpretacja geometryczna liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 1. *Narysować na płaszczyźnie zespolonej liczby:*

a) $z_1 = (3, 2);$

b) $z_2 = (-3, 1);$

c) $z_3 = (-2, 0);$

d) $z_4 = (0, -2).$

Definicja 2. (*równość, suma i iloczyn liczb zespolonych*)

Niech $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi.

1. Równość liczb zespolonych określamy przez warunek:

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2.$$

2. Sumę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

3. Iloczyn liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Rysunek 3. *Interpretacja geometryczna sumy liczb zespolonych.*

Rysunek 4. *Konstrukcja iloczynu liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 2. *Niech $z_1 = (0, 1)$, $z_2 = (3, -4)$ oraz $z_3 = (\sqrt{2}, -3)$.*

Obliczyć

a) $z_1 + z_2, z_2 + z_3;$

b) $z_1 \cdot z_2, z_2 \cdot z_3 .$

Definicja 3. (różnica i iloraz liczb zespolonych)

Niech $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2)$ będą liczbami zespolonymi.

1. Różnicę liczb zespolonych określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

2. Iloraz liczb zespolonych określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1, y_1)}{(x_2, y_2)} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right),$$

o ile $z_2 \neq 0$ (tzn. $x_2 \neq 0$ i $y_2 \neq 0$).

Rysunek 5. *Interpretacja geometryczna różnicy liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 3. *Obliczyć:*

a) $(4, -1) - (-3, 5);$

b) $(-5, 6) - (1, -4);$

c) $\frac{(-1, 2)}{(3, 4)};$

d) $\frac{(0, -6)}{(0, 2)}.$

Uwaga 2. Wszystkie reguły czterech podstawowych działań algebraicznych (dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie) znane dla liczb rzeczywistych obowiązują także w zbiorze liczb zespolonych. W szczególności prawdziwe są wzory skróconego mnożenia, wzór dwumianowy Newtona, wzory na sumę wyrazów ciągu arytmetycznego i geometrycznego itp.

Twierdzenie 1. (zbiór liczb rzeczywistych jako podzbiór zbioru liczb zespolonych)

Liczby zespolone postaci $(x, 0)$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, mają następujące własności:

- 1.** $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$;
- 2.** $(x_1, 0) - (x_2, 0) = (x_1 - x_2, 0)$;
- 3.** $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 \cdot x_2, 0)$;
- 4.** $\frac{(x_1, 0)}{(x_2, 0)} = \left(\frac{x_1}{x_2}, 0 \right)$, gdzie $x_2 \neq 0$.

Uwaga 3. Z własności tych wynika, że zbiór $\tilde{\mathbb{R}} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ można utożsamiać ze zbiorem liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Będziemy pisali x zamiast $(x, 0)$.

Rysunek 6. Zbiór $\tilde{\mathbb{R}}$ jako podzbiór \mathbb{C} .

Definicja 4. Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy ją przez i , zatem

$$i := (0, 1).$$

Ćwiczenie 4. *Uzasadnić, że liczba i jest rozwiązaniem równania $z^2 + 1 = 0$.*

Uwaga 4. Zauważmy, że z powyższego ćwiczenia wynika, że

$$i^2 = -1.$$

Twierdzenie 2. (postać algebraiczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną $z = (x, y)$ można przedstawić w postaci:

$$z = x + iy,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ natomiast i jest jednostką urojoną. Liczbę x nazywamy częścią rzeczywistą (z łac. realis) liczby z , liczbę y nazywamy częścią urojoną (z łac. imaginalis) liczby z . Stosujemy oznaczenia:

$$\operatorname{Re} z := x, \operatorname{Im} z := y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Rysunek 7. *Osie rzeczywista i urojona na płaszczyźnie zespolonej.*

Rysunek 8. *Interpretacja geometryczna postaci algebraicznej liczby zespolonej.*

Uwaga 5. Działania takie jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie wykonywane na liczbach zespolonych danych w postaci algebraicznej wykonujemy jak na wyrażeniach algebraicznych, pamiętając o tym, że $i^2 = -1$ (stąd też bierze się nazwa tej postaci liczby zespolonej). Przy dzieleniu przez liczbę zespoloną $x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, należy dzielnię i dzielnik pomnożyć przez liczbę $x - iy$, aby w mianowniku uzyskać liczbę rzeczywistą.

Ćwiczenie 5. *Obliczyć:* a) $(1 - \sqrt{3}i) + (1 + \sqrt{2}i)$;
b) $(3i - 2) - (1 - 2i)$; c) $(1 + 2i)(-3 + 4i)$; d) $\frac{4 + 5i}{2 - i}$.

Twierdzenie 3. (o równości liczb zespolonych w postaci algebraicznej)

Dwie liczby zespolone są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe, tzn.

$$z_1 = z_2 \iff \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ i } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Ćwiczenie 6. *Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające podane warunki:*

a) $z^2 + 4i = 0;$

b) $\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z = 2;$

c) $\operatorname{Re}(iz) \geq 1;$

d) $\frac{z + 2}{i - 1} = \frac{3z + i}{2 + i};$

e) $z^2 - 6z + 10 = 0.$

Definicja 5. (*sprzężenie liczby zespolonej*)

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę zespoloną \bar{z} określoną wzorem:

$$\bar{z} := x - iy.$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi $\operatorname{Re} z$.

Rysunek 9. *Interpretacja geometryczna sprzężenia liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 7. *Rozwiązać równania:*

a) $2z + (3 - i)\bar{z} = 5 + 4i;$

b) $z + i = \overline{z + i};$

c) $z \cdot \bar{z} + z - \bar{z} = 3 + 2i;$

d) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 5 + 3i.$

Definicja 6. (*moduł liczby zespolonej*)

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Uwaga 6. Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1 i z_2 płaszczyzny zespolonej.

Rysunek 10. *Interpretacja geometryczna modułu liczby zespolonej.*

Rysunek 11. *Interpretacja geometryczna modułu różnicy liczb zespolonych.*

Ćwiczenie 8. *Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych:*

a) $z = -i;$

b) $z = -1 + \sqrt{3}i;$

c) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$

d) $z = -5 - 12i.$

Twierdzenie 4. (własności modułu liczby zespolonej)

Dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ prawdziwe są następujące własności:

- 1.** $|z| = |\bar{z}| = |-z|;$
- 2.** $z \cdot \bar{z} = |z|^2;$
- 3.** $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$
- 4.** $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$ o ile $z_2 \neq 0.$

Rysunek 12. *Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem.*

- a)** $|z - z_0| = r;$ **b)** $|z - z_0| \leq r;$
- c)** $|z - z_0| < r;$ **d)** $|z - z_0| \geq r;$
- e)** $|z - z_0| > r;$ **f)** $r \leq |z - z_0| \leq R;$
- g)** $|z - z_1| = |z - z_2|;$ **h)** $|z - z_1| < |z - z_2|;$
- i)** $|z - z_1| \geq |z - z_2|.$

Ćwiczenie 9. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

a) $|z + i| = 3;$

b) $|2iz + 6| \leq 4;$

c) $2 < |z + 2 - i| \leq 3;$

d) $|z + 5| = |3i - z|;$

e) $\left| \frac{z - 3}{z - 3i} \right| > 1;$

f) $\left| \frac{z + i}{z^2 + 1} \right| \leq 1;$

g) $|\bar{z} + 2 - i| \leq |z|.$

Definicja 7. (*argument liczby zespolonej*)

Argumentem liczby zespolonej z nazywamy każdy kąt $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniający układ równań:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \end{cases}$$

Ten spośród argumentów danej liczby z , który spełnia warunek $0 \leq \varphi < 2\pi$ nazywamy *argumentem głównym* i oznaczmy przez $\arg z$. Każdy argument φ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$

Uwaga 7. Argumenty liczby zespolonej z są miarami zorientowanych kątów nachylenia wektora wodzącego liczby z do osi rzeczywistej. Argument główny liczby zespolonej z jest najmniejszą nieujemną miarą zorientowanego kąta nachylenia wektora wodzącego liczby z do osi rzeczywistej.

Rysunek 13. *Argumenty liczby zespolonej.*

Rysunek 14. *Argument główny liczby zespolonej.*

Ćwiczenie 10. *Znaleźć argumenty główne podanych liczb zespolonych:*

a) $z = 2$; b) $z = i$;

c) $z = -\pi$; d) $z = 3 - 3i$;

e) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; f) $z = -3 + 4i$.

Twierdzenie 5. (własności argumentu)

Dla dowolnych niezerowych liczb zespolonych z, z_1, z_2 prawdziwe są następujące warunki:

- 1.** $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2,$
- 2.** $\arg z^n = n \arg z$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N},$
- 3.** $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2.$

Rysunek 15. *Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem:*

- a) $\arg z = \alpha;$
- b) $\alpha < \arg z \leq \beta;$
- c) $\arg(z - z_0) = \alpha;$
- d) $\alpha \leq \arg(z - z_0) \leq \beta.$

Ćwiczenie 11. Narysować zbiory liczb zespolonych, które spełniają podane warunki:

a) $\arg z = \frac{\pi}{4}$;

b) $\arg (z + i) = \pi$,

c) $\arg (-z) = \frac{2\pi}{3}$;

d) $\arg \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5\pi}{6}$;

e) $\arg (\bar{z}) = \frac{3\pi}{4}$;

f) $\frac{\pi}{2} \leq \arg (z) < \frac{3\pi}{2}$;

g) $\frac{\pi}{6} \leq \arg (2 + i - z) \leq \pi$;

h) $\frac{\pi}{4} < \arg (\bar{z}) \leq \frac{3\pi}{4}$;

i) $\frac{\pi}{6} \leq \arg \left(\frac{1}{z}\right) < \frac{\pi}{2}$;

j) $-\frac{\pi}{4} \leq \arg (z + 1) \leq \frac{\pi}{4}$;

k) $\arg \left(\frac{1}{z + i}\right) < \pi$.

Twierdzenie 6. (postać trygonometryczna liczby zespolonej)

Każdą liczbę zespoloną z , można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie $r \geq 0$ jest modułem liczby z , natomiast $\varphi \in \mathbb{R}$ jest jednym z jej argumentów.

Ćwiczenie 12. *Zapisz podane liczby zespolone w postaci trygonometrycznej:*

a) $z = -1;$

b) $z = 1 + i;$

c) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

Twierdzenie 7. (wzór de Moivre'a*)

Niech $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$ oraz niech $n \in \mathbb{N}$.
Wtedy

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Ćwiczenie 13. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć podane potęgi liczb zespolonych:

a) $(1 + i)^{10}$;

b) $(\sqrt{3} - i)^{60}$;

c) $(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}$.

Ćwiczenie 14. Korzystając ze wzoru de Moivre'a wyprowadzić wzory na: a) $\sin 3\varphi$; b) $\cos 4\varphi$.

*Abraham de Moivre (1667-1754)-matematyk angielski pochodzenia francuskiego.

Definicja 8. (*pierwiastek z liczby zespolonej*)

Pierwiastkiem zespolonym stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby z nazywamy każdą liczbę $\xi \in \mathbb{C}$, taką że

$$\xi^n = z,$$

i oznaczamy podobnie jak pierwiastek rzeczywisty symbolem $\sqrt[n]{z}$.

Twierdzenie 8. (*wzór na pierwiastki liczby zespolonej*)

Każda liczba zespolona $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n . Zbiór tych pierwiastków jest postaci:

$$\sqrt[n]{z} = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}\},$$

gdzie

$$\xi_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

dla $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

Uwaga 8. Zbiór pierwiastków stopnia $n \geq 3$ z liczby zespolonej $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, gdzie $r = |z|$ oraz $\varphi = \arg z$ pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n -kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{|z|}$ i środku w początku układu współrzędnych.

Ćwiczenie 15. *Obliczyć i narysować pierwiastki z podanych liczb zespolonych: a) $\sqrt[3]{8i}$; b) $\sqrt[6]{-27}$; c) $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$; d) $\sqrt[8]{1}$.*

Ćwiczenie 16. *Rozwiązać podane równania kwadratowe:*

a) $z^2 + 3z + 3 - i = 0;$

b) $z^2 + (2i - 1)z + 1 + 5i = 0.$