Elementy logiki matematycznej

Wykład

- Rachunek zdań i kwantyfikatory

Definicja 1. (*zdanie*)
Zdaniem w logice nazywamy zdanie gramatyczne, o którym można orzec, czy jest prawdziwe, czy też fałszywe. Zdania logiczne oznaczmy zwykle literami p, q, r, itd. Zdaniom prawdziwym przypisujemy wartość logiczną 1, a fałszywym 0.

Przykład 1. *a) Zdanie „$2 + 3 = 5$" jest prawdziwe;*
b) Zdanie „3>7" jest fałszywe;
c) Wyrażenie„$x^2 = 4$" nie jest zdaniem logicznym, gdyż jego wartość logiczna zależy od x;
d) Sformułowanie „jestem głodny" także nie jest zdaniem logicznym, gdyż nie wiemy kto je wypowiada.

Definicja 2. (*negacja*)
Zdanie „nieprawda, że p" nazywamy negacją zdania logicznego p i oznaczamy ją symbolem $\sim$. Negacja zdania jest prawdziwa, gdy zdanie jest fałszywe.

Definicja 3. (*alternatywa*)
Zdanie „p lub q" nazywamy alternatywą zdań logicznych p, q i oznaczamy ją symbolem $p \vee q$. Przyjmujemy, że alternatywa zdań jest prawdziwa, gdy przynajmniej jedno ze zdań p, q jest prawdziwe.

Definicja 4. (*koniunkcja*)
Zdanie „p i q" nazywamy koniunkcją zdań logicznych p, q i oznaczamy ją symbolem $p \wedge q$. Przyjmujemy, że koniunkcja zdań jest prawdziwa, gdy oba zdania p, q są prawdziwe.

Definicja 5. (*implikacja*)
Zdanie jeżeli „p, to q" nazywamy implikacją i oznaczamy ją symbolem $p \Longrightarrow q$. Przyjmujemy, że implikacja zdań jest prawdziwa, zdania p oraz q są prawdziwe lub gdy zdanie p jest fałszywe, a zdanie q jest dowolne (tzn. fałszywe lub prawdziwe). W implikacji zdanie p nazywamy poprzednikiem, a zdanie q następnikiem.

Definicja 6. (*równoważność*)
Zdanie „p wtedy i tylko wtedy, gdy q" nazywamy równoważnością i oznaczamy ją symbolem $p \Longleftrightarrow q$. Przyjmujemy, że równoważność jest prawdziwa, gdy oba zdania p, q mają tę samą wartość logiczną.

W tabelkach poniżej podajemy wartości logiczne negacji, alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności w zależności w wartości logicznych zdań je tworzących.

p	$\sim p$
1	0
1	1

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Longrightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Przykład 2. *a) Zdanie „nieprawda, że* $3 \cdot 8 = 25$*" jest prawdziwe;*
b) Zdanie „ $5 > 6$ *lub* $3 > 2$*" jest prawdziwe;*
c) Zdanie „$2^3 = 8$ *i* $\sqrt{9} = -3$*" jest fałszywe;*
d) Zdanie „jeżeli liczba 333 jest podzielna przez 9, to liczba 333 jest podzielna przez 6" jest fałszywe;
e) Zdanie „$2 \geqslant 2 \Longleftrightarrow 1 \geqslant 0$*" jest prawdziwe.*

Definicja 7. (*funkcja zdaniowa*)
Funkcją zdaniową nazywamy wyrażenie składające się ze zmiennych zdaniowych $p, q, r, \ldots,$ połączonych operacjami logicznymi (negacją, alternatywą, koniunkcją, implikacją czy równoważnością).

Przykład 3. *a)* $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\sim p) \vee q]$*;* *b)* $\sim [p \wedge (q \vee r)]$.

Definicja 8. (*prawo logiczne*)
Prawem logicznym nazywamy funkcję zdaniową, która jest prawdziwa po podstawieniu dowolnych zdań logicznych w miejsce zmiennych zdaniowych.

Najważniejsze prawa logiczne

Prawo	Nazwa
$\sim(\sim p) \Longleftrightarrow p$	prawo podwójnego zaprzeczenia
$p \vee (\sim p)$	prawo wyłączonego środka
$[p \wedge (q \vee r)] \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy
$[p \vee (q \wedge r)] \Longleftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji
$[(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow r)] \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$	prawo przechodniości implikacji
$[\sim (p \vee q)] \Longleftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]$	prawo de Morgana dla alternatywy
$[\sim (p \wedge q)] \Longleftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]$	prawo de Morgana dla koniunkcji
$[(\sim p) \Longrightarrow p] \Longrightarrow p$	prawo Claviusa
$(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow [(\sim q) \Longrightarrow (\sim p)]$	prawo transpozycji
$[p \wedge (p \Longrightarrow q)] \Longrightarrow q$	reguła odrywania

Ćwiczenie 1. *Sprawdzić czy następujące funkcje zdaniowe są prawami logicznymi:*
a) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim p \vee q)$;
b) $(q \Longrightarrow p) \Longleftrightarrow (p \vee \sim q)$;
c) $\sim (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$;
d) $(p \Longleftrightarrow q) \Longleftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$;
e) $q \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$.

Definicja 9. (*funkcja zdaniowa jednej zmiennej*)
Niech X oznacza pewien niepusty zbiór zdań logicznych. Funkcją zdaniową jednej zmiennej określoną w zbiorze X nazywamy takie wyrażenie zawierające tylko jedną zmienną, które staje się zdaniem, gdy zamiast zmiennej zdaniowej podstawimy element zbioru X. Oznaczamy ją przez $\varphi(x)$.

Ćwiczenie 2. *Przykładem funkcji zdaniowej jednej zmiennej jest wyrażenie „człowiek waży 70 kg", gdzie słowo „człowiek" gra rolę zmiennej. Po podstawieniu pod słowo „człowiek" konkretnej osoby otrzymujemy zdanie - prawdziwe lub fałszywe.*

Definicja 10. (*mały i duży kwantyfikator*)
Niech zmienna x przebiega zbiór X i niech $\varphi(x)$ będzie funkcją zdaniową. Zdanie „istnieje takie $x \in X$, że $\varphi(x)$" zapisujemy krótko

$$\exists_{x \in X} \varphi(x).$$

Zdanie „dla każdego $x \in X$ jest $\varphi(x)$" zapisujemy

$$\forall_{x \in X} \varphi(x).$$

Symbole $\exists$, $\forall$ użyte w opisanym znaczeniu nazywamy odpowiednio małym i dużym kwantyfikatorem lub kwantyfikatorem szczegółowym i ogólnym.

Ćwiczenie 3. *Zdanie*

$$\exists_x x^3 > 8$$

jest zdaniem prawdziwym, zdanie

$$\exists_x \cos x = -3$$

jest zdaniem fałszywym.

Twierdzenie 1. *(*własności kwantyfikatorów*)*
Jeżeli $\varphi(x)$ jest funkcją zdaniową z jedną zmienną, to zachodzą następujące równoważności

$$[\sim \forall_x \varphi(x)] \Leftrightarrow [\exists_x \sim \varphi(x)] \,,$$

$$[\sim \exists_x \varphi(x)] \Leftrightarrow [\forall_x \sim \varphi(x)] \,.$$

Równoważności te wyrażają prawa de Morgana dla kwantyfikatorów.