Całka oznaczona

Wykład

- Całka Riemanna
- Interpretacja geometryczna
- Podstawowe twierdzenia
- Zastosowania geometryczne całek oznaczonych
- Całki niewłaściwe

Definicja 1. (*podział odcinka*)
Podziałem odcinka $[a, b]$ na n części, gdzie $n \in \mathbb{N}$, nazywamy zbiór

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

przy czym $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Oznaczenia:
Niech $1 \leqslant k \leqslant n$. Wtedy
$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ - długość k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$;
$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_k\}$ - średnica podziału $\mathcal{P}$;
$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ - punkt pośredni k-tego odcinka podziału $\mathcal{P}$.

Definicja 2. (*suma całkowa*)
Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim x_k^*, tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f,\mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k.$$

Rysunek 1. *Suma całkowa funkcji.*

Definicja 3. (*całka oznaczona Riemanna*)
Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całkę oznaczona Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P})\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k,$$

o ile powyższa granica jest właściwa i nie zależy od podziału $\mathcal{P}$ oraz wyboru punktów pośrednich x_k^*.

Uwaga 1. Funkcję dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a, b]$ nazywamy funkcją całkowalną na $[a, b]$.

Twierdzenie 1. *(*Newtona-Leibniza, związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną*)*
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

gdzie F oznacza funkcję pierwotną funkcji f.

Ćwiczenie 1. *Oblicz podane całki:*

a) $\int_{-1}^{2} e^{-x}dx;$

b) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}.$

Twierdzenie 2. *(*o liniowości całki oznaczonej*)*
Jeżeli funkcje f i g są całkowalne na przedziale $[a, b]$, to

$$\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$\int_a^b \Big(cf(x)\Big)dx = c\int_a^b f(x)dx, \quad \textit{gdzie } x \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 3. *(*o addytywności całki względem przedziałów całkowania*)*
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na przedziale $[a, b]$ oraz $c \in [a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Rysunek 2. *Addytywność całki względem przedziałów całkowania.*

Ćwiczenie 2. *Oblicz*

$$\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx.$$

Twierdzenie 4. *(o całkowaniu przez podstawienie)*
Jeżeli
1. funkcja $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *ma ciągłą pochodną na przedziale* $[\alpha, \beta]$*,*
2. $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$*,*
3. funkcja f *jest ciągła na przedziale* $[a, b]$*,*
to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\Big(\varphi(t)\Big)\varphi'(t)dt.$$

Ćwiczenie 3. *Oblicz podane całki:*

a) $\displaystyle\int_0^2 xe^{x^2}dx$*;* *b)* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

Twierdzenie 5. *(*o całkowaniu przez części*)*
Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Ćwiczenie 4. *Oblicz całki:*

a) $\displaystyle\int_1^e \ln^2 x dx$*;*

b) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx$*.*

Twierdzenie 6. *(*Interpretacja geometryczna całki oznaczonej*)* *Jeżeli na przedziale* $[a, b]$ *jest* $f(x) \geqslant 0$, *to pole obszaru leżącego pod łukiem krzywej* $y = f(x)$ *równe jest całce oznaczonej*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Jeżeli zaś na przedziale $[a, b]$ *jest* $f(x) \leqslant 0$, *to pole pod krzywą* $y = f(x)$ *jest równe*

$$-\int_a^b f(x)dx.$$

Ponadto

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad \textit{oraz} \qquad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Ćwiczenie 5. *Oblicz pole ograniczone odcinkiem osi OX od* $x = -1$ *do* $x = 1$*, rzędnymi w tych punktach oraz łukiem linii*

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Ćwiczenie 6. *Oblicz pole ograniczone łukiem paraboli* $y^2 = 2x$ *oraz prostą* $x = 8$*.*

Ćwiczenie 7. *Oblicz pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej* $y = x^3 + x^2 - 2x$, *odcinkiem osi OX oraz rzędnymi w punktach* $x = -2, x = 2$.

Ćwiczenie 8. *Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi:*
a) $y = x^2 + 6x - 7$, $y = 1 - x$;
b) $y = \sqrt{3}\cos x$, $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Twierdzenie 7. *(*Obliczanie pól, gdy linia ograniczająca jest określona w postaci parametrycznej*)*
Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami w postaci parametrycznej

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

gdzie funkcje $g(t)$ i $h(t)$ są ciągłe w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, a przy tym funkcja $g(t)$ jest rosnąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi OX oraz prostymi $x = x_1$, $x = x_2$, gdzie $x_1 = g(t_1)$, $x_2 = g(t_2)$, wyraża się wzorem

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y|\, dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)|\, g'(t) dt.$$

Jeżeli przy tych samych założeniach funkcja jest malejąca w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, to pole obszaru wyraża się wzorem

$$P = \int\limits_{x_1}^{x_2} |y|\, dx = -\int\limits_{t_1}^{t_2} |h(t)|\, g'(t) dt.$$

Ćwiczenie 9. *Obliczyć pole elipsy danej równaniami parametrycznymi*

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Ćwiczenie 10. *Obliczyć pole obszaru ograniczone odcinkiem osi OX i łukiem cykloidy określonej równaniami parametrycznymi*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Ćwiczenie 11. *Obliczyć pole asteroidy określonej równaniami*

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Twierdzenie 8. *(*Obliczanie pól, gdy linia ograniczająca określona jest we współrzędnych biegunowych*)*
Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych

$$r = f(\theta),$$

gdzie $f(\theta)$ jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, a przy tym $0 < \beta - \alpha < 2\pi$, to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej $r = f(\theta)$ oraz promieniami wodzącymi o amplitudach α i β wyraża się wzorem

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta)^2\, d\theta.$$

Ćwiczenie 12. *Obliczyć pole lemniskaty Bernoulliego określonej równaniem*

$$r = \sqrt{\cos 2\theta},$$

gdzie θ *przebiega przedziały* $-\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$ *i* $\frac{3\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{4}$.

Ćwiczenie 13. *Obliczyć pole ograniczone rozetą trójkątną o równaniu*

$$r = \sin 3\theta,$$

gdzie θ *przebiega przedziały* $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \pi$, $\frac{4\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{3}$.

Twierdzenie 9. *(*Długość krzywej*)*
Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci $y = f(x)$, przy czym funkcja $f(x)$ ma w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$ ciągłą pochodną, to długość łuku krzywej w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Ćwiczenie 14. *Wyprowadź wzór na obwód koła o promieniu r.*

Ćwiczenie 15. *Obliczyć długości podanych krzywych:*
a) $y = \ln \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{3}$;
b) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

Twierdzenie 10. *(*Długość krzywej danej parametrycznie*)* *Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań*

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

przy czym funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Ćwiczenie 16. *Obliczyć długość łuku asteroidy*

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*.*

Ćwiczenie 17. *Obliczyć długość łuku cykloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*.*

Twierdzenie 11. *(*Długość krzywej danej biegunowo*)*
Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych $r = f(\theta)$*, przy czym funkcja* $f(\theta)$ *ma w przedziale* $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ *ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem*

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Ćwiczenie 18. *Obliczyć długość łuku spirali logarytmicznej*

$$r = e^{2\theta},$$

gdzie parametr θ *zmienia się w przedziale* $0 \leqslant \theta \leqslant 6\pi$*.*

Twierdzenie 12. *(*Objętość bryły obrotowej*)*
Niech nieujemna funkcja f będzie ciągła na przedziale $[a, b]$. Wtedy objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk krzywej o równaniu $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ obraca się dookoła osi OX, wyraża się wzorem:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Ćwiczenie 19. *Wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu R.*

Ćwiczenie 20. *Oblicz objętości brył powstałych z obrotu podanych krzywych dookoła osi OX:*

a) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;

b) $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $0 \leqslant x \leqslant 4$.

Twierdzenie 13. *(*Objętość bryły obrotowej z łukiem danym parametrycznie*)*
Niech dany będzie łuk AB krzywej określonej równaniami

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

przy czym funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ciągłe pochodne, funkcja $g(t)$ jest w tym przedziale stale rosnąca albo stale malejąca, a funkcja $h(t)$ przybiera wartości nieujemne. Wówczas objętość bryły obrotowej, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi OX wyraża się wzorem

$$L = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt.$$

Ćwiczenie 21. *Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu cykloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*, dookoła osi* OX*.*

Twierdzenie 14. *(*Pole powierzchni obrotowej*)*
Niech nieujemna funkcja f będzie różniczkowalna na przedziale $[a, b]$. Wtedy pole powierzchni obrotowej powstałej z obrotu krzywej o równaniu $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ dookoła osi OX, wyraża się wzorem:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

Ćwiczenie 22. *Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu podanych krzywych dookoła osi OX:*
a) $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
b) $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Twierdzenie 15. *(*Pole powierzchni obrotowej z łukiem danym parametrycznie*)*
Niech dany będzie łuk AB krzywej określonej równaniami

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

przy czym funkcje $g(t)$ i $h(t)$ mają w przedziale $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ ciągłe pochodne, funkcja $g(t)$ jest w tym przedziale stale rosnąca albo stale malejąca, a funkcja $h(t)$ przybiera wartości nieujemne. Wówczas pole powierzchni bryły obrotowej, która powstaje, gdy łuk AB wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi OX wyraża się wzorem

$$L = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Ćwiczenie 23. *Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu cykloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

gdzie parametr t *przebiega przedział* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$*, dookoła osi OX.*

Twierdzenie 16. *(*całka niewłaściwa funkcji nieograniczonej*)* *Niech punkt $c \in [a, b]$ będzie punktem nieograniczoności funkcji f. Jeżeli istnieją granice*

$$\lim_{\varepsilon \to c^-} \int_a^{\varepsilon} f(x)dx \quad \textit{oraz} \quad \lim_{\varepsilon \to c^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

to sumę tych granic nazywamy całką niewłaściwą funkcji nieograniczonej f na przedziale $[a, b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Uwaga 2. Jeżeli któraś z powyższych granic nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Uwaga 3. Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału $[a, b]$, to przez całkę niewłaściwą rozumiemy odpowiednio:

$$\lim_{\varepsilon \to a^+} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \text{albo} \quad \lim_{\varepsilon \to b^-} \int_{a}^{\varepsilon} f(x)dx.$$

Rysunek 3. *Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej.*

Ćwiczenie 24. *Oblicz całki:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x}$.

Twierdzenie 17. *(*całka na przedziale nieograniczonym*)*
Niech funkcja f będzie określona na przedziel $[a, \infty]$. Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \int\limits_{a}^{\varepsilon} f(x)dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji f na przedziale $[a, \infty]$ i oznaczamy symbolem

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx.$$

Uwaga 4. Analogicznie określa się znaczenie symbolu $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$

jako granicę $\lim\limits_{\varepsilon \to -\infty} \int\limits_{\varepsilon}^{b} f(x)dx.$

Ćwiczenie 25. *Oblicz podane całki:*

a) $\int\limits_0^\infty e^{-x} dx$;

b) $\int\limits_1^\infty \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(\arctan x)^2 dx}{1 + x^2}$.