Programowanie liniowe

Analiza wrażliwości

- Macierze obrotu
- Zmiany w wyrazach wolnych ograniczeń
- Zmiany we współczynnikach funkcji celu

Wiele programów liniowych posiada dane, które zmieniają się od czasu do czasu. Dla przykładu w modelu produkcyjnym, mogą zmieniać się ceny sprzedaży wybranych produktów albo dostępność danego surowca czy środka produkcji. Analizowanie jak rozwiązanie optymalne zmienia się wraz ze zmianą różnych danych modelu może dostarczać bardzo przydatnych informacji. Ogół technik związanych z tym tematem nosi nazwę *analizy wrażliwości* lub *analizy postoptymalizacyjnej*.

Poniżej pokażemy, że analiza wrażliwości zazwyczaj nie wymaga ponownego rozwiązania całego programu liniowego z nowymi danymi. Często tablica optymalna wyjściowego problemu może zostać użyta do otrzymania rozwiązania problemu ze zmienionymi danymi.

MACIERZE OBROTU

Definicja 1. *Macierzą obrotu* nazywamy macierz kwadratową Q taką, że pomnożenie tablicy (rozumianej jako macierz):

$$M \quad = \quad \begin{array}{|c|c|} \hline -d & c^T \\ \hline b & A \\ \hline \end{array}$$

przez Q daje taki sam efekt jak wykonanie serii obrotów na tablicy M.

Uwaga 1. Macierze obrotu są ważnym narzędziem w ulepszonej metodzie sympleks oraz w analizie wrażliwości.

Jeżeli M_1 otrzymujemy z tablicy M przez pojedynczy obrót, wtedy dosyć łatwo otrzymać macierz obrotu Q_1 taką, że

$$M_1 = Q_1 M.$$

Wystarczy zastosować regułę:

„Zrobić z macierzą jednostkową to co zrobiono z macierzą M"

Aby zilustrować powyższą regułę i skonstruować macierz obrotu Q_1 taką, że $M_1 = Q_1 M$ rozważmy następującą tablicę z zaznaczoną osią obrotu:

$$M \quad = \quad \begin{array}{|r|rrrr|}\hline -3 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 & \underline{\ 2} \\ \hline \end{array}$$

Stosując regułę wykonamy przekształcenia elementarne na wierszach macierzy jednostkowej I jakie wykonalibyśmy robiąc obrót tablicy wokół zaznaczonego elementu. Tablica M ma trzy wiersze, więc używamy tutaj macierzy

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wykonujemy następujące przekształcenia na macierzy I:
- do wiersza pierwszego dodajemy wiersz trzeci,
- od wiersza drugiego odejmujemy wiersz trzeci podzielony przez 2,
- wiersz trzeci dzielimy przez 2.

Daje to macierz:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Uwaga 2. Zauważmy, że pierwsza kolumna macierzy obrotu zawsze będzie pierwszą kolumną jednostkową z uwagi na fakt, że wiersz pierwszy tablicy M (wiersz funkcji celu) nigdy nie będzie wierszem obrotu.

Wykonując mnożenie macierzy QM dostajemy tablicę identyczną jak po wykonaniu obrotu:

$$M_1 = Q_1 M = \begin{array}{|r|rrrr|}
\hline
-1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\
1 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
\end{array}$$

W przypadku, gdy mamy już wyznaczoną tablicę M_1 (tzn. wykonaliśmy już obrót tablicy M) macierz obrotu możemy odczytać bezpośrednio z tablicy M_1.

Tablica M jest w postaci kanonicznej, zatem zawiera wszystkie kolumny jednostkowe oprócz pierwszej. Ale pierwsza kolumna w Q_1 jest zawsze pierwszą kolumną jednostkową, więc potrzebujemy jedynie wiedzieć jak pozostałe kolumny jednostkowe są przekształcane na skutek obrotu. Gdy znamy tablicę M_1 wystarczy odczytać w co zostały przekształcone kolumny jednostkowe z tablicy M - dają one kolejne kolumny w macierzy obrotu Q_1.

Uwaga 3. W analogiczny sposób możemy wyznaczyć macierz obrotu przeprowadzającą pierwszą tablicę sympleksową w ostatnią tablicę sympleksową.

ZMIANY W WYRAZACH WOLNYCH OGRANICZEŃ

Jeszcze raz odwołajmy się do przykładu rozwiązanego poprzednio na dwa sposoby: metodą graficzną i za pomocą algorytmu sympleks.

Przykład 1.
Zakład może wytwarzać dwa wyroby P_1 i P_2. Ich produkcja jest limitowana ze względu na ograniczone zasoby trzech surowców: S_1, S_2 i S_3. Posiadane zapasy tych surowców, zyski jednostkowe ze sprzedaży produktów oraz nakłady jednostkowe poszczególnych surowców związane z produkcją podaje poniższa tabela.

	P_1	P_2	Zasoby
S_1	2	2	14
S_2	1	2	8
S_3	4	0	16
Zyski	2	3	

Przypomnijmy pierwszą i ostatnią tablicę (tzn. optymalną) tego problemu:

$$T_A = \begin{array}{|r|rrrrr|} \hline 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$T_C = \begin{array}{|r|rrrrr|} \hline 14 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Znając te dwie tablice możemy podać macierz obrotu Q taką, że $T_C = QT_A$. Mamy

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(*Analiza dla* b_1)

Przypuśćmy teraz, że zapas pierwszego surowca S_1 w naszym problemie wynosi $14 + a$ jednostek zamiast 14 jednostek, gdzie zmiana a może być dodatnia lub ujemna. Żeby przeanalizować jak ta zmiana wpływa na rozwiązanie optymalne, rozważmy następującą tablicę $T_A^{'}$, która różni się od oryginalnej tablicy T_A tylko tym, że $14 + a$ zastępuje 14 w kolumnie stałych.

$$T_A^{'} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14+a & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Jeżeli wykonamy na $T_A^{'}$ tą samą serię obrotów, która przekształca T_A na T_C otrzymamy tablicę: $T_C^{'} = QT_A^{'}$. Ponieważ $T_C^{'}$ różni się od T_C tylko kolumną stałych, potrzebujemy obliczyć tylko tę kolumnę. W efekcie dostajemy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 14+a \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2+a \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Dostajemy tablicę postaci:

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 14 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2+a & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Ta tablica będzie optymalna, jeżeli

$$2 + a \geqslant 0$$

czyli musi być $a \geqslant -2$. Daje nam to dopuszczalny przedział dla pierwszego surowca: $b_1 \in [12, +\infty)$. Wektor optymalny i wartość optymalna pozostają bez zmian. Zmiana zasobów tego surowca w przedziale dopuszczalnym nie wpływa na rozwiązanie.

(*Analiza dla* b_2)

Przypuśćmy teraz, że zapas drugiego surowca S_2 wynosi $8+b$ jednostek zamiast 8 jednostek, gdzie zmiana b może być dodatnia lub ujemna. Wtedy tablica $T_A^{'}$ jest postaci:

$T_A^{'} =$

0	-2	-3	0	0	0
14	2	2	1	0	0
$8+b$	1	2	0	1	0
16	4	0	0	0	1

Przemnażamy macierz obrotu przez kolumnę wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 8+b \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+\frac{3}{2}b \\ 2-b \\ 2+\frac{1}{2}b \\ 4 \end{bmatrix}$$

i dostajemy nową tablicę:

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 14+\frac{3}{2}b & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2-b & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2+\frac{1}{2}b & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Ta tablica pozostaje optymalna, jeżeli

$$2-b \geqslant 0 \quad \text{i} \quad 2+\frac{1}{2}b \geqslant 0$$

co zachodzi o ile: $-4 \leqslant b \leqslant 2$. Daje nam to dopuszczalny przedział dla drugiego surowca: $b_2 \in [4, 10]$.

Nowy wektor optymalny jest postaci $\widehat{x} = \left[4, 2+\frac{1}{2}b\right]^T$, wartość optymalna wynosi $z(\widehat{x}) = 14+\frac{3}{2}b$. Przykładowo dla $b=2$ mamy $\widehat{x} = [4,3]^T$ i wartość $z(\widehat{x}) = 17$.

($\mathit{Analiza\ dla}\ b_3$)

Przypuśćmy teraz, że zapas trzeciego surowca S_3 wynosi $16 + c$ jednostek zamiast 16 jednostek, gdzie zmiana c może być dodatnia lub ujemna. Wtedy tablica $T_A^{'}$ jest postaci:

$T_A^{'} =$

0	-2	-3	0	0	0
14	2	2	1	0	0
8	1	2	0	1	0
$16 + c$	4	0	0	0	1

Przemnażamy macierz obrotu przez kolumnę wyrazów wolnych

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 8 \\ 16 + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 + \frac{1}{8}c \\ 2 - \frac{1}{4}c \\ 2 - \frac{1}{8}c \\ 4 + \frac{1}{4}c \end{bmatrix}$$

i dostajemy nową tablicę:

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 14+\frac{1}{8}c & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2-\frac{1}{4}c & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2-\frac{1}{8}c & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4+\frac{1}{4}c & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Ta tablica pozostaje optymalna, jeżeli

$$2-\frac{1}{4}c \geqslant 0 \quad \text{i} \quad 2-\frac{1}{8}c \geqslant 0 \quad \text{i} \quad 4+\frac{1}{4}c \geqslant 0$$

co zachodzi o ile: $-16 \leqslant c \leqslant 8$. Daje nam to dopuszczalny przedział dla trzeciego surowca: $b_3 \in [0,24]$.

Nowy wektor optymalny jest postaci $\widehat{x} = \left[4+\frac{1}{4}c, 2-\frac{1}{8}c\right]^T$, wartość optymalna wynosi $z(\widehat{x}) = 14+\frac{1}{8}c$. Przykładowo dla $c = 8$ mamy $\widehat{x} = [6,1]^T$ i wartość $z(\widehat{x}) = 15$.

ZMIANY WE WSPÓŁCZYNNIKACH FUNKCJI CELU

Z analizy metody graficznej rozwiązywania programów liniowych wiemy, że wierzchołek zbioru dopuszczalnego może być punktem optymalnym dla wielu różnych funkcji celu.

W rzeczywistości dosyć łatwo określić zakres o jaki pojedynczy współczynnik funkcji celu może się różnić od oryginalnego bez zmiany wektora optymalnego.

($Analiza\ dla\ c_1$)

Niech teraz dla naszego przykładu, p oznacza zmianę w zysku ze sprzedaży pierwszego wyrobu. Przyjmujemy więc, że zysk ze sprzedaży pierwszego wyrobu wynosi teraz $2+p$ zamiast 2. Zatem początkowa tablica sympleksowa przyjmuje postać:

$$T_A^{'} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 0 & -2-p & \text{-3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Wykonując na tablicy $T_A^{'}$ tę samą serię obrotów, którą wykonaliśmy przechodząc od T_A do T_C, otrzymamy następująca tablicę:

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|r|cccccc|} \hline 14 & -p & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Widać, że różni się ona od tablicy optymalnej jedynie współczynnikiem c_1. Żeby przekonać się, że to poprawna postać tablicy wystarczy zastosować macierz obrotu i wykonać mnożenie: $T_C^{'} = QT_A^{'}$.

Tablica $T_A^{'}$ różni się od oryginalnej T_A tylko kolumną x_1, zatem to mnożenie wystarczy wykonać tylko dla kolumny x_1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2-p \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zauważmy, że tablica $T_C^{'}$ nie jest w postaci kanonicznej. Wykonujemy zatem obrót zgodnie z zasadą sympleks wokół zaznaczonego elementu

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|r|ccccr|} \hline 14 & -p & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & \underline{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

i dostajemy:

$$T_C^{''} \quad = \quad \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 14+4p & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8}+\frac{1}{4}p \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

Ta tablica pozostaje w postaci optymalnej, jeżeli

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4}p \geqslant 0$$

co zachodzi dla: $p \geqslant -\frac{1}{2}$. Daje nam to dopuszczalny przedział cenowy dla pierwszego współczynnika: $c_1 \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$.

(*Analiza dla* c_2)

Niech q oznacza zmianę w zysku ze sprzedaży drugiego wyrobu. Przyjmujemy więc, że zysk ze sprzedaży drugiego wyrobu wynosi teraz $3+q$ zamiast 3. Zatem początkowa tablica sympleksowa przyjmuje postać:

$$T_A' = \begin{array}{|c|ccccc|} \hline 0 & -2 & -3-q & 0 & 0 & 0 \\ \hline 14 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Wykonując na tablicy $T_A^{'}$ tę samą serię obrotów, którą wykonaliśmy przechodząc od T_A do T_C, otrzymamy następująca tablicę:

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|r|cccrr|}
\hline
14 & 0 & -q & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{4} \\
2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\
4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}$$

Różni się ona od tablicy optymalnej jedynie współczynnikiem c_2.

Tablica $T_C^{'}$ nie jest w postaci kanonicznej. Wykonujemy zatem obrót zgodnie z zasadą sympleks wokół zaznaczonego elementu

$$T_C^{'} \quad = \quad \begin{array}{|r|cccccc|}
\hline
14 & 0 & -q & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{8} \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\
2 & 0 & \underline{1} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\
4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}$$

i dostajemy:

$$T_C^{''} \quad = \quad \begin{array}{|c|cccccc|}
\hline
14+2q & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}+\frac{1}{2}q & \frac{1}{8}-\frac{1}{8}q \\
\hline
2 & 0 & 0 & 1 & \text{-1} & -\frac{1}{4} \\
2 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\
4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}$$

Ta tablica będzie w postaci optymalnej, jeżeli

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}q \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \frac{1}{8} - \frac{1}{8}q \geqslant 0$$

co zachodzi dla: $-3 \leqslant q \leqslant 1$. Daje nam to dopuszczalny przedział dla drugiego współczynnika funkcji celu: $c_2 \in [0, 4]$.