Rozwiązywanie układów równań liniowych

Wykład 3

- Metody bezpośrednie: Gaussa i rozkładu LU

Wprowadzenie.

Treść tego wykładu stanowią algorytmy (m.in. iteracyjne) służące do rozwiązywania układów równań liniowych. Za główny cel stawiamy sobie omówienie aspektów numerycznych rozwiązywania takich układów.

Definicja 1. (*układ równań liniowych*)
Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_i, x_j \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

Definicja 2. (*rozwiązanie układu równań*)
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Definicja 3. (*układ sprzeczny, oznaczony i nieoznaczony*)
Rozpatrzmy dowolny układ równań liniowych. Zachodzi jedna z trzech możliwości:
1. Zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym. Układ taki nazywamy układem sprzecznym.
2. Zbiór rozwiązań zawiera dokładnie jeden element. Układ taki nazywamy układem oznaczonym.
3. Zbiór rozwiązań zawiera nieskończenie wiele elementów. Układ taki nazywamy układem nieoznaczonym.

Definicja 4. (*postać macierzowa układu równań*)
Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą współczynników lub macierzą główną układu, macierz X - macierzą niewiadomych, macierz B - macierzą wyrazów wolnych.

Definicja 5. (*macierz uzupełniona*)
Macierzą uzupełnioną nazywamy macierz powstałą z macierzy A przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych. Macierz uzupełnioną będziemy oznaczać przez A_u, tzn.

$$A_u := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Definicja 6. (*równoważność układów równań*)
Mówimy, że układy równań liniowych

$$AX = B \quad \text{i} \quad A'X' = B'$$

są równoważne, jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

Twierdzenie 1. *(*o równoważnym przekształcaniu układów*)* *Następujące operacje na wierszach macierzy uzupełnionej U układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:*

1. zamiana między sobą wierszy;

2. mnożenie wiersza przez stałą różną od zera;

3. dodanie do ustalonego wiersza innego wiersza pomnożonego przez stałą;

4. skreślenie wiersza złożonego z samych zer;

5. skreślenie jednego z równych lub proporcjonalnych wierszy;

6. zamiana miejscami dwóch kolumn (przy jednoczesnej zamianie niewiadomych).

Metoda eliminacji Gaussa dla układów równań liniowych

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas układ ten rozwiązujemy następująco:

1. budujemy macierz uzupełnioną A_u;
2. na macierzy uzupełnionej dokonujemy równoważnych przekształceń układu sprowadzając ją do postaci:

$$A'_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{rr+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} \end{bmatrix},$$

przy czym ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpić ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$.

Wówczas,
a) jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ $AX = B$ jest sprzeczny;
b) jeżeli ostatni wiersz macierzy A'_u nie pojawi się i $n = r$, to układ $AX = B$ jest oznaczony i jego jedyne rozwiązanie jest postaci

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \\ \;\dots\dots\dots \\ x_n = z_n, \end{cases} \quad ;$$

c) jeżeli ostatni wiersz macierzy A'_u nie pojawi się i $n > r$, to układ $AX = B$ jest nieoznaczony.

Uwaga 1. Liczba r jest wyznaczona jednoznacznie. Jest to tzw. rząd macierzy A.

Uwaga 2. *(*Podstawowa eliminacja Gaussa)
Rozwiązanie układu $AX = B$ można uzyskać stosując prostszą wersję eliminacji Gaussa, kończy się na przekształceniu macierzy uzupełnionej do macierzy trójkątnej górnej i sukcesywnym wyznaczaniu rozwiązania z kolejnych równań, począwszy od ostatniego.

Uwaga 3. Zastosowanie podstawowej eliminacji Gaussa pozwala na obliczenie wyznacznika macierzy A, który jest równy iloczynowi elementów na głównej przekątnej.

Ćwiczenie 1. *Rozwiąż układ*

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 12, \end{cases}$$

stosując podstawową oraz pełną eliminację Gaussa. Oblicz wyznacznik macierzy A oraz rząd macierzy A i A_u.

Ćwiczenie 2. *Za pomocą eliminacji Gaussa rozwiąż układ*

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 3. *Obliczyć rząd macierzy stosując eliminację Gaussa*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix};$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$

Wyznaczanie macierzy odwrotnej za pomocą eliminacji Gaussa

Niech A będzie macierzą nieosobliwą. Algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} jest nastepujący:
1. tworzymy macierz blokową $[A|I]$,
2. na tej macierzy wykonujemy przekształcenia równoważne sprowadzając ją do postaci $[I|B]$.

Macierz B jest wtedy macierzą odwrotną do A, tzn.

$$B = A^{-1}.$$

Ćwiczenie 4. *Stosując eliminację Gaussa wyznaczyć macierz odwrotną do*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix}$.

Rozkład LU

Niech A będzie macierzą, którą można wyrazić za pomocą iloczynu macierzy trójkątnej dolnej L i trójkątnej górnej U, tzn.

$$A = LU.$$

Wtedy układ $AX = B$ można rozwiązać w dwóch krokach:
1. rozwiązać układ $LY = B$ względem Y;
2. rozwiązać układ $UX = Y$ względem X.

Wiemy, że będzie to łatwe, gdyż każdy z tych układów ma macierz trójkątną.

Uwaga 4. Nie każda macierz ma rozkład LU. Algorytmy wyznaczania macierzy L i U załamują się, jeżeli na którymś etapie obliczeń wystąpi dzielenie przez 0.

Ćwiczenie 5. *Wyznaczyć rozkład LU macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

a następnie rozwiązać układ

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Ćwiczenie 6. *Metodą rozkładu LU rozwiązać układ z ćwiczenia 2.*