Aproksymacja

1 Wielomian interpolacyjny Lagrange'a

Ćwiczenie 1. Wyznaczyć wielomian przechodzący przez punkty o współrzędnych (5,145), (-7,-23), (-6,-54), (0,-954) stosując wzór Lagrange'a.

Wprowadzam węzły interpolacji i wartości w tych wezłach:

```
(%i16) x[0]:5; y[0]:145;
       x[1]:−7; y[1]:−23;
       x[2]:−6; y[2]:−54;
       x[3]:0; y[3]:−954;
(x[0]) 5
(y[0]) 145
(x[1]) −7
(y[1]) −23
(x[2]) −6
(y[2]) −54
(x[3]) 0
(y[3]) −954
```

Tworzę wielomiany l_k(x) (wykład str. 4):

```
(%i20) l[0](x):=''(((x−x[1])·(x−x[2])·(x−x[3]))/((x[0]−x[1])·(x[0]−x[2])·(x[0]−x[3])));
       l[1](x):=''(((x−x[0])·(x−x[2])·(x−x[3]))/((x[1]−x[0])·(x[1]−x[2])·(x[1]−x[3])));
       l[2](x):=''(((x−x[0])·(x−x[1])·(x−x[3]))/((x[2]−x[0])·(x[2]−x[1])·(x[2]−x[3])));
       l[3](x):=''(((x−x[0])·(x−x[1])·(x−x[2]))/((x[3]−x[0])·(x[3]−x[1])·(x[3]−x[2])));
```

(%o17) $l_0(x):=\frac{x\,(x+6)\,(x+7)}{660}$

(%o18) $l_1(x):=-\frac{(x-5)\,x\,(x+6)}{84}$

(%o19) $l_2(x):=\frac{(x-5)\,x\,(x+7)}{66}$

(%o20) $l_3(x):=-\frac{(x-5)\,(x+6)\,(x+7)}{210}$

Tworzę wielomian interpolacyjny korzystając ze wzoru Lagrange'a (str.4):

```
(%i21) p(x):=''(sum(y[k]·l[k](x),k,0,3));
```

(%o21) $\mathrm{p}(x):=\frac{29\,x\,(x+6)\,(x+7)}{132}+\frac{159\,(x-5)\,(x+6)\,(x+7)}{35}-\frac{9\,(x-5)\,x\,(x+7)}{11}+\frac{23\,(x-5)\,x\,(x+6)}{84}$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i22) %,factor;

(%o22) $p(x):=\frac{232\,x^3+2081\,x^2-4116\,x-52470}{55}$

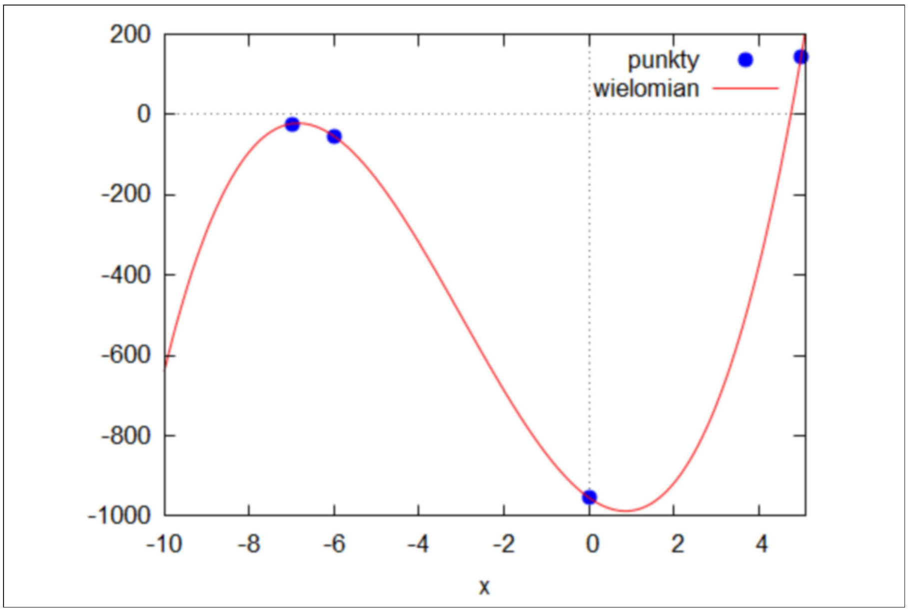
Przedstawimy punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

(%i23) xy:[[5,145],[−7,−23],[−6,−54],[0,−954]];

(xy) [[5,145],[−7,−23],[−6,−54],[0,−954]]

i robię wykres

(%i24) wxplot2d([[discrete, xy], p(x)], [x,−10,5.1], [style, points, lines], [legend,"punkty","wielomian"])$

(%t24) 

(%i25) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 2. Wyznaczyć wielomian interpolujący wartośći funkcji f(x)=e^x w węzłach {-1,-1/2,0,1/2,1}.

Wprowadzam funkcję

(%i1) f(x):=%e^(x);

(%o1) $f(x):=\%e^{x}$

i węzły

```
(%i6) x[0]:−1;
x[1]:−1/2;
x[2]:0;
x[3]:1/2;
x[4]:1;
```

(x[0]) -1

(x[1]) $-\frac{1}{2}$

(x[2]) 0

(x[3]) $\frac{1}{2}$

(x[4]) 1

Tworzę wielomiany l_k(x) (wykład str. 4):

```
(%i11) l[0](x):=''(((x−x[1])·(x−x[2])·(x−x[3])·(x−x[4]))/((x[0]−x[1])·(x[0]−x[2])·(x[0]−x[3])·(x[0]−x[4])));
l[1](x):=''(((x−x[0])·(x−x[2])·(x−x[3])·(x−x[4]))/((x[1]−x[0])·(x[1]−x[2])·(x[1]−x[3])·(x[1]−x[4])));
l[2](x):=''(((x−x[0])·(x−x[1])·(x−x[3])·(x−x[4]))/((x[2]−x[0])·(x[2]−x[1])·(x[2]−x[3])·(x[2]−x[4])));
l[3](x):=''(((x−x[0])·(x−x[1])·(x−x[2])·(x−x[4]))/((x[3]−x[0])·(x[3]−x[1])·(x[3]−x[2])·(x[3]−x[4])));
l[4](x):=''(((x−x[0])·(x−x[1])·(x−x[2])·(x−x[3]))/((x[4]−x[0])·(x[4]−x[1])·(x[4]−x[2])·(x[4]−x[3])));
```

(%o7) $l_0(x):=\frac{2\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}$

(%o8) $l_1(x):=-\frac{8\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)x\,(x+1)}{3}$

(%o9) $l_2(x):=4\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)$

(%o10) $l_3(x):=-\frac{8\,(x-1)\,x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)}{3}$

(%o11) $l_4(x):=\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)}{3}$

Tworzę wielomian interpolacyjny ze wzoru Lagrange'a (str.4):

(%i12) p(x):=''(sum(f(x[k])·l[k](x),k,0,4));

(%o12) $p(x):=\frac{2\,\%e\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)}{3}-\frac{8\sqrt{\%e}\,(x-1)\,x\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)}{3}+4\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+1)-\frac{8\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)x\,(x+1)}{3\sqrt{\%e}}+\frac{2\,\%e^{-1}(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)x\left(x+\frac{1}{2}\right)}{3}$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i13) %,factor;

(%o13) $p(x):=(((4\,\%e^2+24\,\%e+4)\,x^4+(4\,\%e^2-4)\,x^3+(-\%e^2-30\,\%e-1)\,x^2+(-\%e^2+1)\,x+6\,\%e)\sqrt{\%e}+(-16\,\%e^2-16\,\%e)\,x^4+(-8\,\%e^2+8\,\%e)\,x^3+(16\,\%e^2+16\,\%e)\,x^2+(8\,\%e^2-8\,\%e)\,x)/(6\,\%e\sqrt{\%e})$

Przedstawimy punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

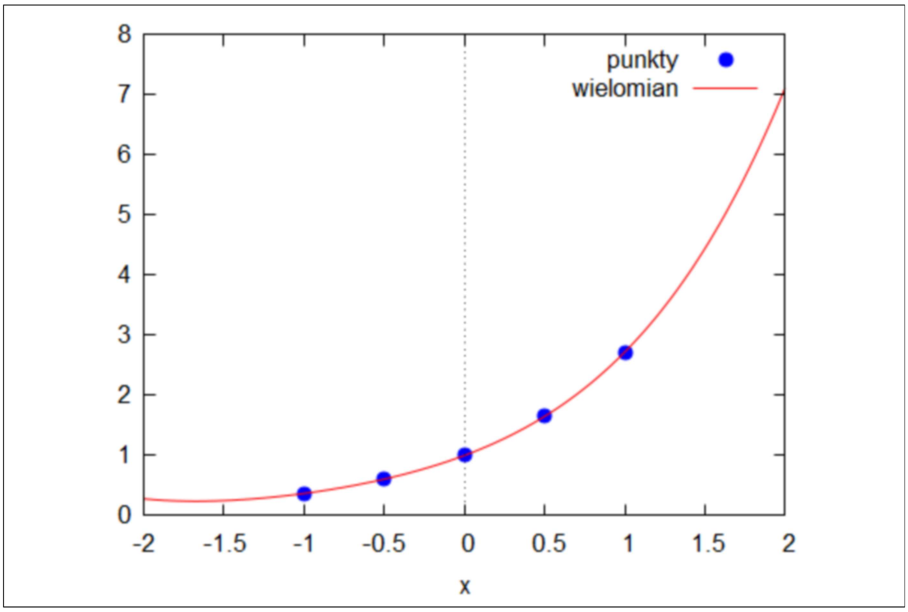
(%i14) xy:[[−1,f(−1)],[−1/2,f(−1/2)],[0,f(0)],[1/2,f(1/2)],[1,f(1)]];

(xy) $[[-1,\%e^{-1}],[-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{\%e}}],[0,1],[\frac{1}{2},\sqrt{\%e}],[1,\%e]]$

i robię wykres

(%i15) wxplot2d([[discrete, xy], p(x)], [x,−2,2], [style, points, lines], [legend,"punkty","wielomian"])$

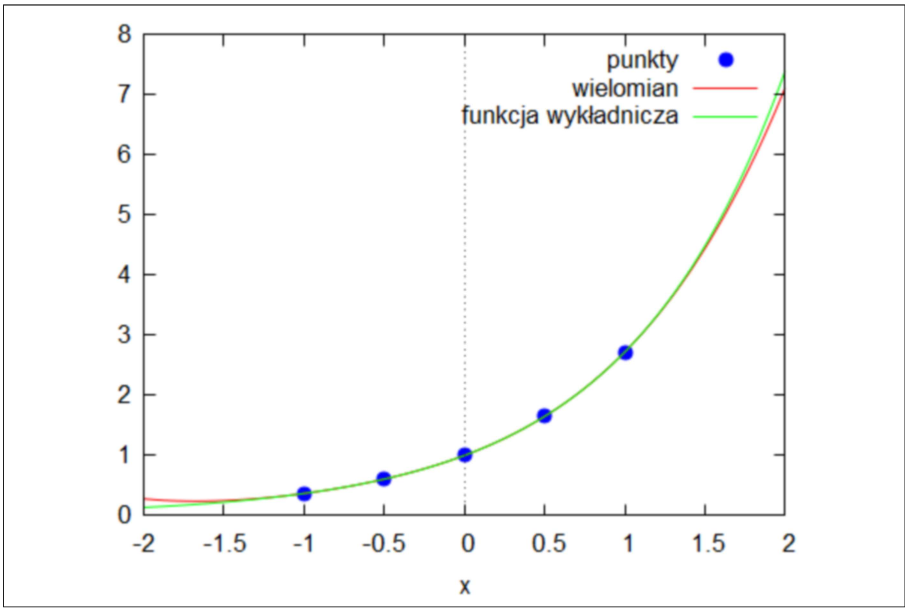
(%t15)



Aby zobaczyć jak dobra jest to aproksymacja, dorysujmy jeszcze wykres funkcji f:

```
→ wxplot2d([[discrete, xy], p(x),f(x)], [x,−2,2], [style, points, lines,lines], [legend,"punkty","wielomia
```

(%t16)



Pomiędzy węzłami wykresy pokrywają się, zatem można sądzić, że jest to bardzo dobra aproksymacja.

```
(%i16) kill(all);
(%o0) done
```

2 *Wielomian interpolacyjny Newtona*

Ćwiczenie 3.

Wprowadzam węzły interpolacji i wartości w tych wezłach:

```
(%i8) x[0]:3; y[0]:1;
      x[1]:1; y[1]:−3;
      x[2]:5; y[2]:2;
      x[3]:6; y[3]:4;
(x[0]) 3
(y[0]) 1
(x[1]) 1
(y[1]) −3
(x[2]) 5
(y[2]) 2
(x[3]) 6
(y[3]) 4
```

Tworzę wielomiany q_k(x) (str. 6)

(%i12)
```
q[0](x):=1;
q[1](x):=''(prod(x-x[j],j,0,0));
q[2](x):=''(prod(x-x[j],j,0,1));
q[3](x):=''(prod(x-x[j],j,0,2));
```

(%o9) $q_0(x):=1$

(%o10) $q_1(x):=x-3$

(%o11) $q_2(x):=(x-3)(x-1)$

(%o12) $q_3(x):=(x-5)(x-3)(x-1)$

Tworzę ilorazy różnicowe (str. 7-8):

Rzędu zerowego:

(%i16)
```
f[x0]:y[0];
f[x1]:y[1];
f[x2]:y[2];
f[x3]:y[3];
```

(f[x0]) 1

(f[x1]) -3

(f[x2]) 2

(f[x3]) 4

Rzędu pierwszego:

(%i19)
```
f[x0x1]:(f[x1]-f[x0])/(x[1]-x[0]);
f[x1x2]:(f[x2]-f[x1])/(x[2]-x[1]);
f[x2x3]:(f[x3]-f[x2])/(x[3]-x[2]);
```

(f[x0x1]) 2

(f[x1x2]) $\frac{5}{4}$

(f[x2x3]) 2

Rzędu drugiego:

(%i21)
```
f[x0x1x2]:(f[x1x2]-f[x0x1])/(x[2]-x[0]);
f[x1x2x3]:(f[x2x3]-f[x1x2])/(x[3]-x[1]);
```

(f[x0x1x2]) $-\frac{3}{8}$

(f[x1x2x3]) $\frac{3}{20}$

Rzędu trzeciego:

(%i22) f[x0x1x2x3]:(f[x1x2x3]−f[x0x1x2])/(x[3]−x[0]);

(f[x0x1x2x3]) $\frac{7}{40}$

Mam obliczone współczynniki c_k, mianowicie (str. 9)

(%i26) c[0]:f[x0];
c[1]:f[x0x1];
c[2]:f[x0x1x2];
c[3]:f[x0x1x2x3];

(c[0]) 1

(c[1]) 2

(c[2]) $-\frac{3}{8}$

(c[3]) $\frac{7}{40}$

Tworzę wielomian interpolacyjny ze wzoru Newtona (str.6):

(%i27) p(x):=''(sum(c[k]·q[k](x),k,0,3));

(%o27) $p(x):=\frac{7(x-5)(x-3)(x-1)}{40}-\frac{3(x-3)(x-1)}{8}+2(x-3)+1$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i28) %,factor;

(%o28) $p(x):=\frac{7x^3-78x^2+301x-350}{40}$

Przedstawię punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

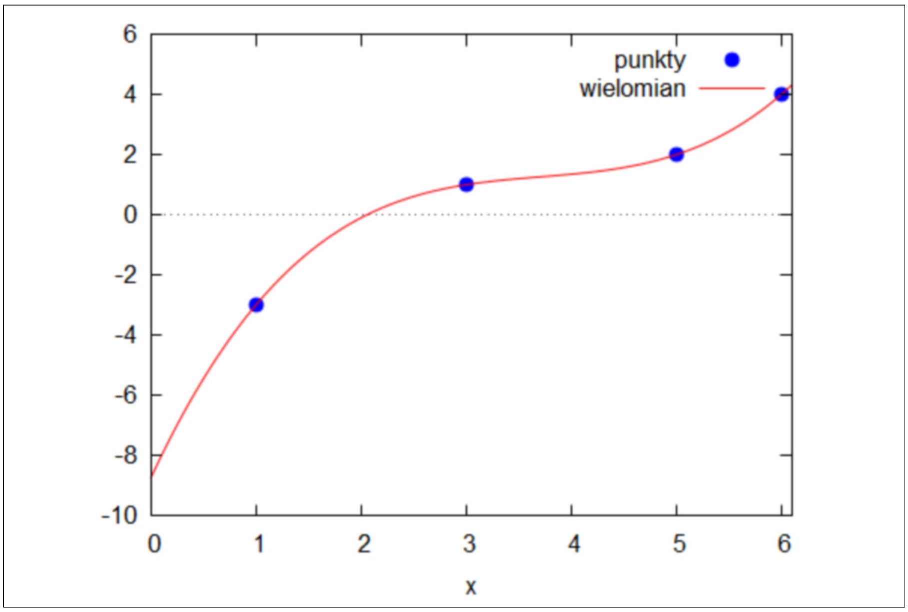
(%i29) xy:[[3,1],[1,−3],[5,2],[6,4]];

(xy) [[3,1],[1,−3],[5,2],[6,4]]

i robię wykres

(%i30) wxplot2d([[discrete, xy], p(x)], [x,0,6.1], [style, points, lines], [legend,"punkty","wielomian"])$

(%t30)



(%i31) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 4.

Wprowadzam funkcję f(x)=lnx

(%i1) f(x):=log(x);

(%o1) $f(x):=\log(x)$

oraz węzły interpolacji:

(%i4)
```
x[0]:1;
x[1]:2;
x[2]:4;
```

(x[0]) 1

(x[1]) 2

(x[2]) 4

Tworzę wielomiany q_k(x) (str. 6)

(%i7)
```
q[0](x):=1;
q[1](x):=''(prod(x−x[j],j,0,0));
q[2](x):=''(prod(x−x[j],j,0,1));
```

(%o5) $q_0(x):=1$

(%o6) $q_1(x):=x-1$

(%o7) $q_2(x):=(x-2)\,(x-1)$

Tworzę ilorazy różnicowe (str. 7-8):

Rzędu zerowego:

```
(%i10) f[x0]:f(x[0]);
       f[x1]:f(x[1]);
       f[x2]:f(x[2]);
```

(f[x0]) 0

(f[x1]) $\log(2)$

(f[x2]) $\log(4)$

Rzędu pierwszego:

```
(%i12) f[x0x1]:(f[x1]−f[x0])/(x[1]−x[0]);
       f[x1x2]:(f[x2]−f[x1])/(x[2]−x[1]);
```

(f[x0x1]) $\log(2)$

(f[x1x2]) $$\frac{\log(4)-\log(2)}{2}$$

Rzędu drugiego:

```
(%i13) f[x0x1x2]:(f[x1x2]−f[x0x1])/(x[2]−x[0]);
```

(f[x0x1x2]) $$\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$$

Mam obliczone współczynniki c_k, mianowicie (str. 9)

```
(%i16) c[0]:f[x0];
       c[1]:f[x0x1];
       c[2]:f[x0x1x2];
```

(c[0]) 0

(c[1]) $\log(2)$

(c[2]) $$\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$$

Tworzę wielomian interpolacyjny ze wzoru Newtona (str.6):

```
(%i17) p(x):=''(sum(c[k]·q[k](x),k,0,2));
```

(%o17) $$p(x):=\frac{\left(\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)\right)(x-2)(x-1)}{3}+\log(2)(x-1)$$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i18) %,factor;

(%o18) $p(x):=\frac{((\log(4)-3\log(2))\,x-2\log(4)+12\log(2))\,(x-1)}{6}$

Przedstawię punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

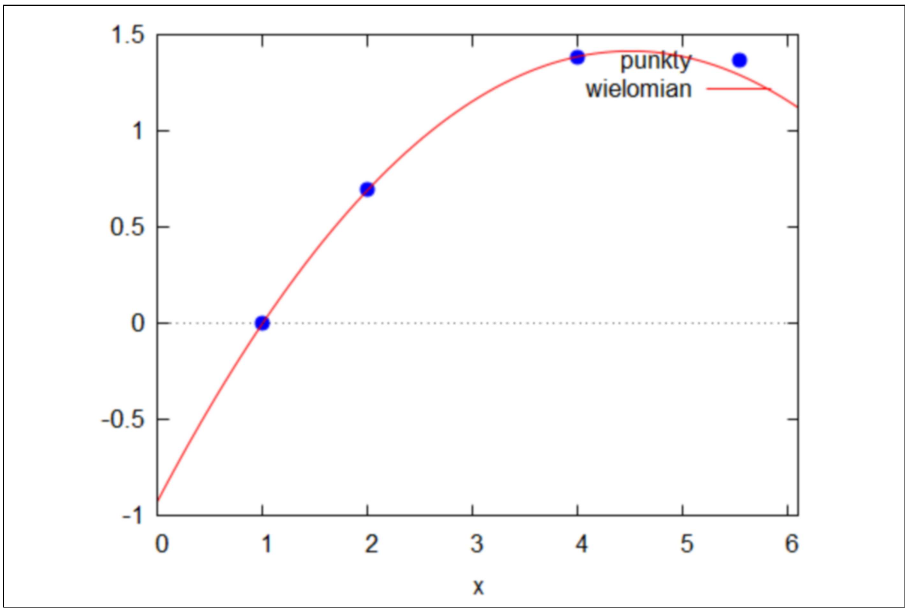
(%i19) xy:[[1,f(1)],[2,f(2)],[4,f(4)]];

(xy) $[[1,0],[2,\log(2)],[4,\log(4)]]$

i robię wykres

(%i20) wxplot2d([[discrete, xy], p(x)], [x,0,6.1], [style, points, lines], [legend,"punkty","wielomian"])$

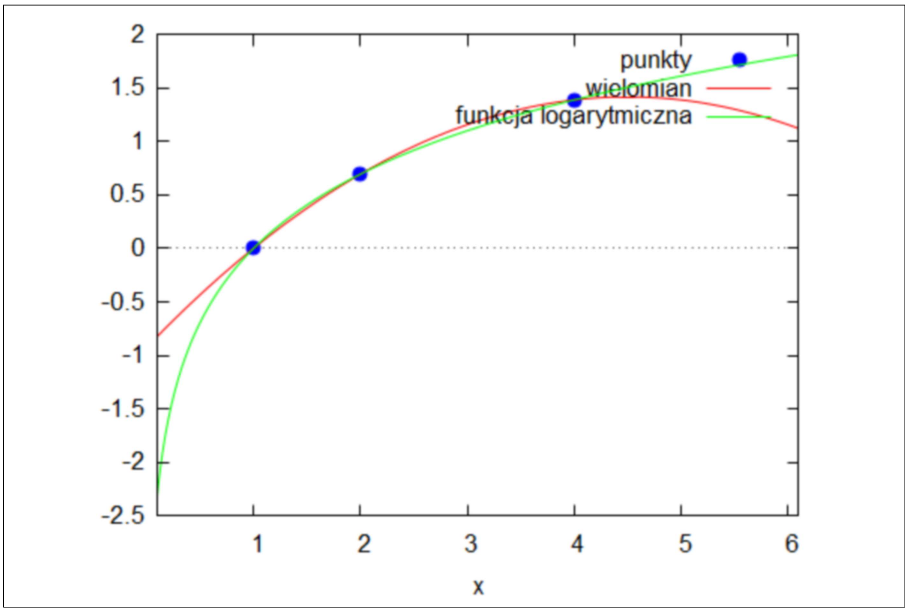
(%t20)



Dorysuję jeszcze wykres funkcji f, żeby zobaczyć jak dobrze wielomian przybliża tę funkcję.

(%i21) wxplot2d([[discrete, xy], p(x),f(x)], [x,0.1,6.1], [style, points, lines,lines], [legend,"punkty","wielom

(%t21)



Wielomian interpolacyjny ma "dobrze" aproksymować funkcję pomiędzy węzłami. Z rysunku widać, że przedziale [1,4] wykresy nieznacznie się mijają, ale są dosyć blisko. Najgorsza sytuacja jest w pobliżu x=3. Zobaczmy jak różnią się wartości wielomianu i funkcji wykładniczej w tym punkcie.

(%i24)
```
f(3),numer;
p(3),numer;
abs(f(3)−p(3)),numer;
```

(%o22) 1.09861228866811

(%o23) 1.155245300933242

(%o24) 0.05663301226513240

W celu polepszenia aproksymacji należałoby zwiększyć liczbę węzłów. Zobaczmy jak zmieni się sytuacja gdy dołożymy jeden węzeł.

Dodaję czwarty węzeł interpolacji:

(%i28)
```
x[0]:1;
x[1]:2;
x[2]:4;
x[3]:1/2;
```

(x[0]) 1

(x[1]) 2

(x[2]) 4

(x[3]) $\frac{1}{2}$

Tworzę wielomiany q_k(x) (str. 6)

```
(%i32) q[0](x):=1;
q[1](x):=''(prod(x−x[j],j,0,0));
q[2](x):=''(prod(x−x[j],j,0,1));
q[3](x):=''(prod(x−x[j],j,0,2));
```

(%o29) $q_0(x):=1$

(%o30) $q_1(x):=x-1$

(%o31) $q_2(x):=(x-2)(x-1)$

(%o32) $q_3(x):=(x-4)(x-2)(x-1)$

Tworzę ilorazy różnicowe (str. 7-8):

Rzędu zerowego:

```
(%i36) f[x0]:f(x[0]);
f[x1]:f(x[1]);
f[x2]:f(x[2]);
f[x3]:f(x[3]);
```

(f[x0]) 0

(f[x1]) $\log(2)$

(f[x2]) $\log(4)$

(f[x3]) $-\log(2)$

Rzędu pierwszego:

```
(%i39) f[x0x1]:(f[x1]−f[x0])/(x[1]−x[0]);
f[x1x2]:(f[x2]−f[x1])/(x[2]−x[1]);
f[x2x3]:(f[x3]−f[x2])/(x[3]−x[2]);
```

(f[x0x1]) $\log(2)$

(f[x1x2]) $\frac{\log(4)-\log(2)}{2}$

(f[x2x3]) $-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}$

Rzędu drugiego:

```
(%i41) f[x0x1x2]:(f[x1x2]−f[x0x1])/(x[2]−x[0]);
f[x1x2x3]:(f[x2x3]−f[x1x2])/(x[3]−x[1]);
```

(f[x0x1x2]) $\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$

(f[x1x2x3]) $-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}$

Rzędu trzeciego:

(%i42) f[x0x1x2x3]:(f[x1x2x3]−f[x0x1x2])/(x[3]−x[0]);

(f[x0x1x2x3]) $$-2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)$$

Mam obliczone współczynniki c_k, mianowicie (str. 9)

(%i46) c[0]:f[x0];
c[1]:f[x0x1];
c[2]:f[x0x1x2];
c[3]:f[x0x1x2x3];

(c[0]) 0

(c[1]) $\log(2)$

(c[2]) $$\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$$

(c[3]) $$-2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)$$

Tworzę wielomian interpolacyjny ze wzoru Newtona (str.6):

(%i47) p(x):=''(sum(c[k]·q[k](x),k,0,3));

(%o47) $$p(x):=-2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)(x-4)(x-2)(x-1)+\frac{\left(\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)\right)(x-2)(x-1)}{3}+\log(2)(x-1)$$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i48) %,factor;

(%o48) $p(x):=(((2\log(4)+2\log(2))\,x^2+(-5\log(4)-33\log(2))\,x+2\log(4)+100\log(2))\,(x-1))/42$

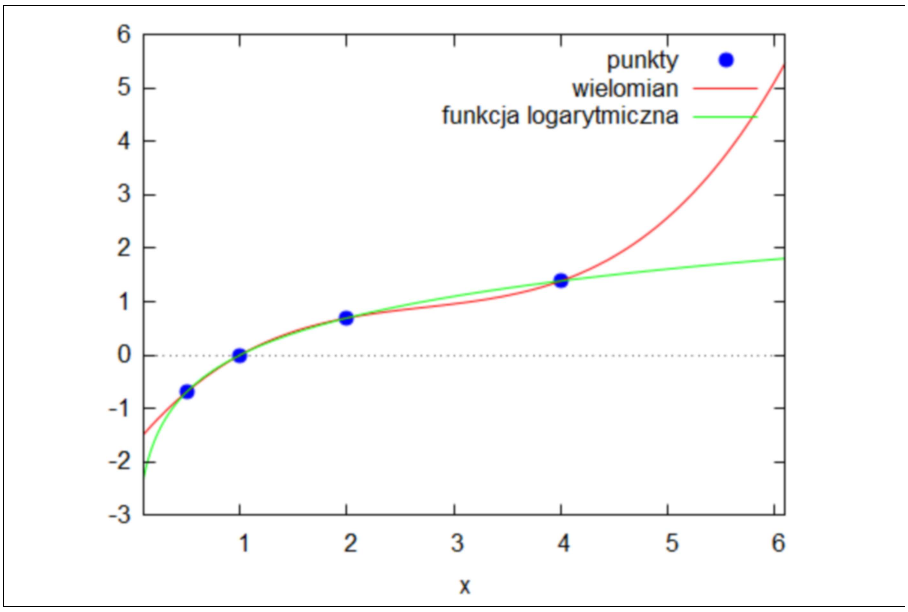
Przedstawię punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

(%i49) xy:[[1,f(1)],[2,f(2)],[4,f(4)],[1/2,f(1/2)]];

(xy) $[[1,0],[2,\log(2)],[4,\log(4)],[\frac{1}{2},-\log(2)]]$

i robię wykres

(%i50) wxplot2d([[discrete, xy], p(x),f(x)], [x,0.1,6.1], [style, points, lines,lines], [legend,"punkty","wielom

(%t50) 

Zobaczmy czy zmieniła się sytuacja w x=3.

(%i53) f(3),numer;
p(3),numer;
abs(f(3)−p(3)),numer;

(%o51) 1.09861228866811

(%o52) 0.9572032493446865

(%o53) 0.1414090393234233

Błąd jest nawet większy. Najlepiej byłoby dołożyć węzeł x=3 lub w pobliżu. Spóbujmy wziąć x=3.5.

Dodaję piąty węzeł interpolacji:

```
(%i58) x[0]:1;
x[1]:2;
x[2]:4;
x[3]:1/2;
x[4]:7/2;
```

(x[0]) 1

(x[1]) 2

(x[2]) 4

(x[3]) $\frac{1}{2}$

(x[4]) $\frac{7}{2}$

Tworzę wielomiany q_k(x) (str. 6)

```
(%i63) q[0](x):=1;
q[1](x):=''(prod(x-x[j],j,0,0));
q[2](x):=''(prod(x-x[j],j,0,1));
q[3](x):=''(prod(x-x[j],j,0,2));
q[4](x):=''(prod(x-x[j],j,0,3));
```

(%o59) $q_0(x):=1$

(%o60) $q_1(x):=x-1$

(%o61) $q_2(x):=(x-2)(x-1)$

(%o62) $q_3(x):=(x-4)(x-2)(x-1)$

(%o63) $q_4(x):=(x-4)(x-2)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

Tworzę ilorazy różnicowe (str. 7-8):

Rzędu zerowego:

```
(%i68) f[x0]:f(x[0]);
f[x1]:f(x[1]);
f[x2]:f(x[2]);
f[x3]:f(x[3]);
f[x4]:f(x[4]);
```

(f[x0]) 0

(f[x1]) $\log(2)$

(f[x2]) $\log(4)$

(f[x3]) $-\log(2)$

(f[x4]) $\log\left(\frac{7}{2}\right)$

Rzędu pierwszego:

(%i72) f[x0x1]:(f[x1]−f[x0])/(x[1]−x[0]);
f[x1x2]:(f[x2]−f[x1])/(x[2]−x[1]);
f[x2x3]:(f[x3]−f[x2])/(x[3]−x[2]);
f[x3x4]:(f[x4]−f[x3])/(x[4]−x[3]);

(f[x0x1]) $\log(2)$

(f[x1x2]) $\dfrac{\log(4)-\log(2)}{2}$

(f[x2x3]) $-\dfrac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}$

(f[x3x4]) $\dfrac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}$

Rzędu drugiego:

(%i75) f[x0x1x2]:(f[x1x2]−f[x0x1])/(x[2]−x[0]);
f[x1x2x3]:(f[x2x3]−f[x1x2])/(x[3]−x[1]);
f[x2x3x4]:(f[x3x4]−f[x2x3])/(x[4]−x[2]);

(f[x0x1x2]) $\dfrac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$

(f[x1x2x3]) $-\dfrac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}$

(f[x2x3x4]) $-2\left(\dfrac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}+\dfrac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}\right)$

Rzędu trzeciego:

(%i77) f[x0x1x2x3]:(f[x1x2x3]−f[x0x1x2])/(x[3]−x[0]);
f[x1x2x3x4]:(f[x2x3x4]−f[x1x2x3])/(x[4]−x[1]);

(f[x0x1x2x3]) $-2\left(-\dfrac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\dfrac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)$

(f[x1x2x3x4]) $\left(2\left(\dfrac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}-2\left(\dfrac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}+\dfrac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}\right)\right)\right)/\,3$

Rzędu czwartego:

(%i78) f[x0x1x2x3x4]:(f[x1x2x3x4]−f[x0x1x2x3])/(x[4]−x[0]);

(f[x0x1x2x3x4])
$$\left(2\left(2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)+\left(2\left(\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}-2\left(\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}+\frac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}\right)\right)\right)/3\right)\right)/5$$

Mam obliczone współczynniki c_k, mianowicie (str. 9)

(%i83) c[0]:f[x0];
c[1]:f[x0x1];
c[2]:f[x0x1x2];
c[3]:f[x0x1x2x3];
c[4]:f[x0x1x2x3x4];

(c[0]) 0

(c[1]) $\log(2)$

(c[2])
$$\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}$$

(c[3])
$$-2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)$$

(c[4])
$$\left(2\left(2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)+\left(2\left(\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}-2\left(\frac{2(-\log(4)-\log(2))}{7}+\frac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}\right)\right)\right)/3\right)\right)/5$$

Tworzę wielomian interpolacyjny ze wzoru Newtona (str.6):

(%i84) `p(x):=''(sum(c[k]·q[k](x),k,0,4));`

(%o84)
$$p(x):=(2\,(2\left(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}\right)+(2\,(\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3}-2\left(\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}+\frac{\log\left(\frac{7}{2}\right)+\log(2)}{3}\right)))/3)\,(x-4)\,(x-2)\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right))/5-2\,(-\frac{\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)}{3}-\frac{2\left(-\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\frac{2\,(-\log(4)-\log(2))}{7}\right)}{3})\,(x-4)\,(x-2)\,(x-1)+\frac{\left(\frac{\log(4)-\log(2)}{2}-\log(2)\right)(x-2)\,(x-1)}{3}+\log(2)\,(x-1)$$

Zapisuję go w postaci ogólnej.

(%i85) `%,factor;`

(%o85)
$$p(x):=((\left(60\log(4)-112\log\left(\frac{7}{2}\right)+60\log(2)\right)x^3+\left(-360\log(4)+728\log\left(\frac{7}{2}\right)-360\log(2)\right)x^2+\left(585\log(4)-1232\log\left(\frac{7}{2}\right)+165\log(2)\right)x-210\log(4)+448\log\left(\frac{7}{2}\right)+1260\log(2))\,(x-1))/630$$

Przedstawię punkty i interpolujący je wielomian na wykresie. W tym celu definiuję zbiór punktów do narysowania:

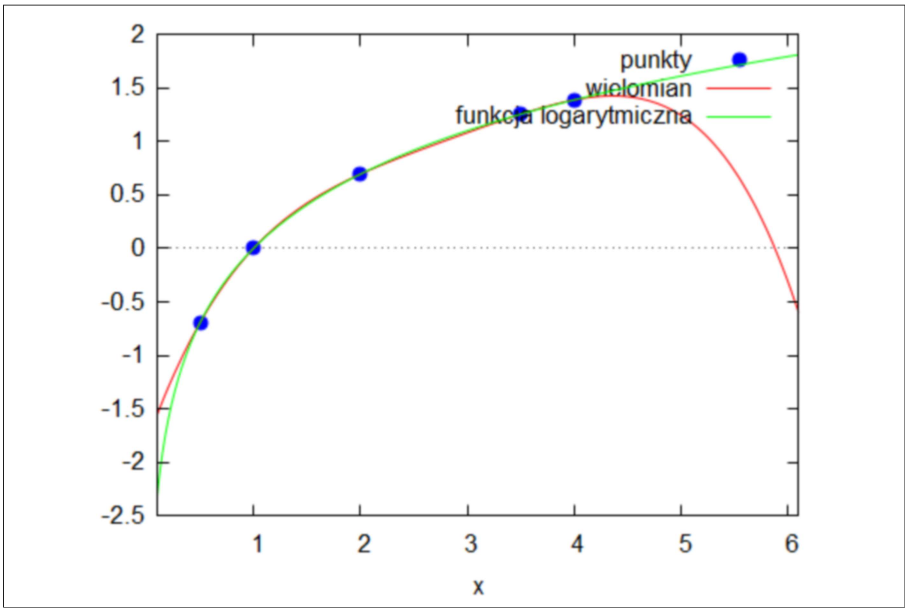
(%i86) `xy:[[1,f(1)],[2,f(2)],[4,f(4)],[1/2,f(1/2)],[7/2,f(7/2)]];`

(xy)
$$[[1,0],[2,\log(2)],[4,\log(4)],[\frac{1}{2},-\log(2)],[\frac{7}{2},\log\left(\frac{7}{2}\right)]]$$

i robię wykres

```
(%i87) wxplot2d([[discrete, xy], p(x),f(x)], [x,0.1,6.1], [style, points, lines,lines], [legend,"punkty","wielom
```

(%t87)



Zobaczmy jak teraz zmieniła się sytuacja w x=3.

```
(%i90) f(3),numer;
       p(3),numer;
       abs(f(3)−p(3)),numer;
(%o88) 1.09861228866811
(%o89) 1.080560074508901
(%o90) 0.01805221415920832
```

Jest lepiej. Błąd bezwzględny zmiejszył się ponad 3krotnie.

```
(%i91) kill(all);
(%o0) done
```

3 *Metoda najmniejszych kwadratów*

Ćwiczenie 7.

Wprowadzam dane.

```
(%i12) x[0]:0; y[0]:10;
       x[1]:1; y[1]:25;
       x[2]:2; y[2]:51;
       x[3]:3; y[3]:66;
       x[4]:4;y[4]:97;
       x[5]:5;y[5]:118;
(x[0]) 0
(y[0]) 10
(x[1]) 1
(y[1]) 25
(x[2]) 2
(y[2]) 51
(x[3]) 3
(y[3]) 66
(x[4]) 4
(y[4]) 97
(x[5]) 5
(y[5]) 118
```

Definiuję funkcję F(a,b), którą będę minimalizował (str. 16).

```
(%i13) F(a,b):=''(sum((y[k]−(a·x[k]+b))^2,k,0,5));
```

(%o13) $F(a,b):=(-b-a+25)^2+(-b-2a+51)^2+(-b-3a+66)^2+(-b-4a+97)^2+(-b-5a+118)^2+(10-b)^2$

Obliczam pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

```
(%i15) dF_a(a,b):=''(diff(F(a,b),a,1));
       dF_b(a,b):=''(diff(F(a,b),b,1));
```

(%o14) $dF_a(a,b):=-2(-b-a+25)-4(-b-2a+51)-6(-b-3a+66)-8(-b-4a+97)-10(-b-5a+118)$

(%o15) $dF_b(a,b):=-2(-b-a+25)-2(-b-2a+51)-2(-b-3a+66)-2(-b-4a+97)-2(-b-5a+118)-2(10-b)$

Wyznaczam punkty stacjonarne, tzn. rozwiązania układu:
dF_a(a,b)=0
dF_b(a,b)=0.

```
(%i16) linsolve([dF_a(a,b)=0,dF_b(a,b)=0],[a,b]);
```

(%o16) $[a=\frac{771}{35},b=\frac{128}{21}]$

Równanie prostej najlepiej dopasowanej do tych danych jest postaci:

(%i17) y(x):=771/35·x+128/21;

(%o17) $y(x):=\frac{771}{35}x+\frac{128}{21}$

Na koniec zobaczmy jak sytuacja przedstawia się na rysunku.

Wprowadzam dane

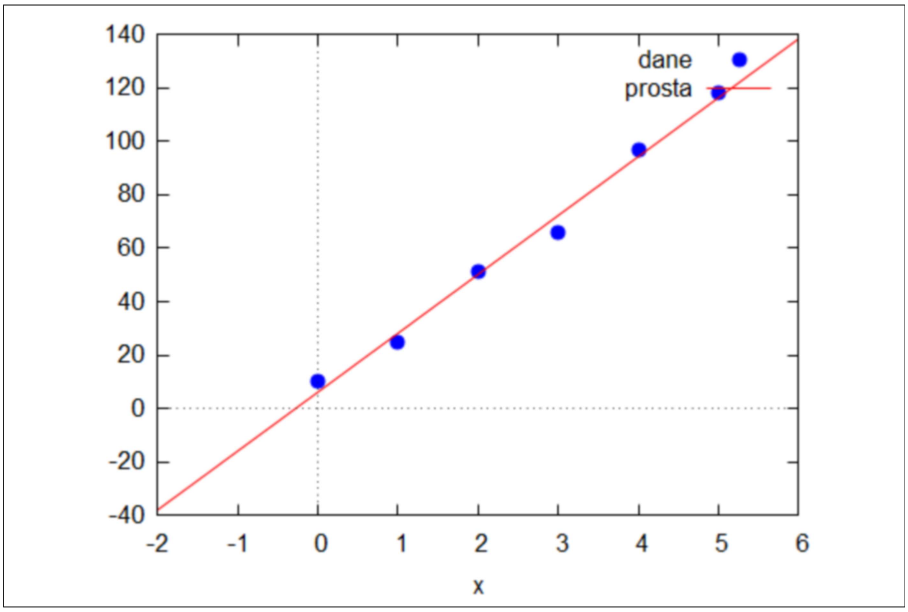
(%i18) xy:[[0,10],[1,25],[2,51],[3,66],[4,97],[5,118]];

(xy) [[0,10],[1,25],[2,51],[3,66],[4,97],[5,118]]

i robię wykres

(%i19) wxplot2d([[discrete, xy], y(x)], [x,−2,6], [style, points, lines], [legend,"dane","prosta"])$

(%t19)



(%i20) kill(all);

(%o0) *done*

Ćwiczenie 8.

Wprowadzam dane.

```
(%i26) x[0]:0; y[0]:0.716;
       x[1]:10; y[1]:0.893;
       x[2]:20; y[2]:1.055;
       x[3]:30; y[3]:1.134;
       x[4]:40;y[4]:1.167;
       x[5]:50;y[5]:1.281;
       x[6]:60;y[6]:1.994;
       x[7]:70;y[7]:2.500;
       x[8]:80;y[8]:3.151;
       x[9]:90;y[9]:4.300;
       x[10]:100;y[10]:5.308;
       x[11]:110;y[11]:4.966;
       x[12]:120;y[12]:10.919;
(x[0])  0
(y[0])  0.716
(x[1])  10
(y[1])  0.893
(x[2])  20
(y[2])  1.055
(x[3])  30
(y[3])  1.134
(x[4])  40
(y[4])  1.167
(x[5])  50
(y[5])  1.281
(x[6])  60
(y[6])  1.994
(x[7])  70
(y[7])  2.5
(x[8])  80
(y[8])  3.151
(x[9])  90
(y[9])  4.3
(x[10]) 100
(y[10]) 5.308
(x[11]) 110
(y[11]) 4.966
(x[12]) 120
(y[12]) 10.919
```

Definiuję funkcję F(a,b), którą będę minimalizował (str. 16).

(%i27) F(a,b):=''(sum((log(y[k])−(a·x[k]+b))^2,k,0,12));

(%o27) $F(a,b):=(-b-10\,a-0.113168698105638)^2+(-b-20\,a+0.05354076692802976)^2+(-b-30\,a+0.1257512053055602)^2+(-b-40\,a+0.154436353304419)^2+(-b-50\,a+0.2476410229145971)^2+(-b-60\,a+0.6901426715396466)^2+(-b-70\,a+0.9162907318741551)^2+(-b-80\,a+1.147719862775137)^2+(-b-90\,a+1.458615022699517)^2+(-b-100\,a+1.669215116469961)^2+(-b-110\,a+1.602614687085975)^2+(-b-120\,a+2.390504391031929)^2+(-b-0.3340751120214915)^2$

Obliczam pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

(%i29) dF_a(a,b):=''(diff(F(a,b),a,1));
dF_b(a,b):=''(diff(F(a,b),b,1));

(%o28) $dF_a(a,b):=-20\,(-b-10\,a-0.113168698105638)-40\,(-b-20\,a+0.05354076692802976)-60\,(-b-30\,a+0.1257512053055602)-80\,(-b-40\,a+0.154436353304419)-100\,(-b-50\,a+0.2476410229145971)-120\,(-b-60\,a+0.6901426715396466)-140\,(-b-70\,a+0.9162907318741551)-160\,(-b-80\,a+1.147719862775137)-180\,(-b-90\,a+1.458615022699517)-200\,(-b-100\,a+1.669215116469961)-220\,(-b-110\,a+1.602614687085975)-240\,(-b-120\,a+2.390504391031929)$

(%o29) $dF_b(a,b):=-2\,(-b-10\,a-0.113168698105638)-2\,(-b-20\,a+0.05354076692802976)-2\,(-b-30\,a+0.1257512053055602)-2\,(-b-40\,a+0.154436353304419)-2\,(-b-50\,a+0.2476410229145971)-2\,(-b-60\,a+0.6901426715396466)-2\,(-b-70\,a+0.9162907318741551)-2\,(-b-80\,a+1.147719862775137)-2\,(-b-90\,a+1.458615022699517)-2\,(-b-100\,a+1.669215116469961)-2\,(-b-110\,a+1.602614687085975)-2\,(-b-120\,a+2.390504391031929)-2\,(-b-0.3340751120214915)$

Wyznaczam punkty stacjonarne, tzn. rozwiązania układu:
dF_a(a,b)=0
dF_b(a,b)=0.

(%i30) linsolve([dF_a(a,b)=0,dF_b(a,b)=0],[a,b]),numer;

rat: replaced 2.390504391031929 by 18488302/7734059 = 2.390504391031928
rat: replaced 1.602614687085975 by 38728708/24165951 = 1.602614687085975
rat: replaced 1.669215116469961 by 28469679/17055728 = 1.669215116469962
rat: replaced 1.458615022699517 by 45879239/31453974 = 1.458615022699516
rat: replaced 1.147719862775137 by 31577989/27513673 = 1.147719862775137
rat: replaced 0.9162907318741551 by 18164268/19823695 = 0.9162907318741537
rat: replaced 0.6901426715396466 by 5965870/8644401 = 0.6901426715396475
rat: replaced 0.2476410229145971 by 14989251/60528142 = 0.2476410229145973
rat: replaced 0.154436353304419 by 10028932/64938933 = 0.1544363533044191
rat: replaced 0.1257512053055602 by 2116910/16834113 = 0.1257512053055602
rat: replaced 0.05354076692802976 by 20100815/375430091 = 0.05354076692802975
rat: replaced -0.113168698105638 by -8229215/72716353 = -0.1131686981056379
rat: replaced -0.3340751120214915 by -7979061/23884033 = -0.3340751120214915
rat: replaced 2.390504391031929 by 18488302/7734059 = 2.390504391031928
rat: replaced 1.602614687085975 by 38728708/24165951 = 1.602614687085975
rat: replaced 1.669215116469961 by 28469679/17055728 = 1.669215116469962
rat: replaced 1.458615022699517 by 45879239/31453974 = 1.458615022699516
rat: replaced 1.147719862775137 by 31577989/27513673 = 1.147719862775137
rat: replaced 0.9162907318741551 by 18164268/19823695 = 0.9162907318741537
rat: replaced 0.6901426715396466 by 5965870/8644401 = 0.6901426715396475
rat: replaced 0.2476410229145971 by 14989251/60528142 = 0.2476410229145973
rat: replaced 0.154436353304419 by 10028932/64938933 = 0.1544363533044191
rat: replaced 0.1257512053055602 by 2116910/16834113 = 0.1257512053055602
rat: replaced 0.05354076692802976 by 20100815/375430091 = 0.05354076692802975
rat: replaced -0.113168698105638 by -8229215/72716353 = -0.1131686981056379

(%o30) $[a=0.0209026920453457, b=-0.4842209056590652]$

Równanie prostej najlepiej dopasowanej do tych danych jest postaci:

(%i31) y(x):=0.0209026920453457·x−0.4842209056590652;

(%o31) $y(x):=0.0209026920453457\,x-0.4842209056590652$

Na koniec zobaczmy jak sytuacja przedstawia się na rysunku.

Wprowadzam dane

(%i32) xy:[[0,log(y[0])],[10,log(y[1])],[20,log(y[2])],[30,log(y[3])],[40,log(y[4])],[50,log(y[5])],[60,log(y[6])],[

(xy) [[0,−0.3340751120214915],[10,−0.113168698105638],[20,
0.05354076692802976],[30,0.1257512053055602],[40,
0.154436353304419],[50,0.2476410229145971],[60,
0.6901426715396466],[70,0.9162907318741551],[80,
1.147719862775137],[90,1.458615022699517],[100,
1.669215116469961],[110,1.602614687085975],[120,
2.390504391031929]]

i robię wykres

(%i33) wxplot2d([[discrete, xy], y(x)], [x,−2,140], [style, points, lines], [legend,"dane","prosta"])$

(%t33)