# Całki nieoznaczone

Wykład

- Funkcje pierwotne
- Całki nieoznaczone
- Twierdzenia o całkach nieoznaczonych
- Całkowanie funkcji wymiernych i niewymiernych
- Całkowanie funkcji trygonometrycznych

**Definicja 1.** (*funkcja pierwotna*)
Funkcja $F$ jest funkcją pierwotną funkcji $f$ na przedziale $(a, b)$, jeżeli

$$F'(x) = f(x)$$

dla każdego $x \in (a, b)$.

**Twierdzenie 1.** *(*warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej*)*
*Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale* $(a, b)$*, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.*

**Definicja 2.** (*całka nieoznaczona*)
Niech $F$ będzie funkcją pierwotną funkcji $f$, a $C \in \mathbb{R}$ dowolną stałą. Całką nieoznaczoną funkcji $f$, oznaczoną symbolem

$$\int f(x)dx,$$

nazywamy zbiór funkcji

$$\{F(x) + C\}.$$

Mamy zatem

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \iff \quad [F(x) + C]' = f(x).$$

## Całki ważniejszych funkcji elementarnych

1. $\int 0dx = C, \quad C \in \mathbb{R}$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad x > 0,\ a \neq 0$

a) Dla $a = 0$, otrzymujemy: $\int dx = x + C$

b) Dla $a = 1$, otrzymujemy: $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

c) Dla $a = -\frac{1}{2}$, otrzymujemy: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C, \quad x > 0$

d) Dla $a = -2$, otrzymujemy: $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C, \quad x \neq 0$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C$

5. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0$

6. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad -1 < x < 1$

8. $\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \mathrm{arctg} x + C$

9. $\int e^x dx = e^x + C$

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1$

11. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad x \neq 0$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln (x + \sqrt{x^2 + k}) + C$

**Ćwiczenie 1.** *Obliczyć podane całki nieoznaczone:*

a) $\int x^5 dx$;

b) $\int \sqrt[3]{x} dx$;

c) $\int \frac{dx}{x^4}$;

d) $\int e^x dx$;

e) $\int \frac{dx}{e^x}$.

**Twierdzenie 2.** *(*o liniowości całki nieoznaczonej*)*
*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają funkcje pierwotne, to*

*1.* $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int (g(x)dx$,

*2.* $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int (g(x)dx$,

*3.* $\int c\cdot f(x)dx = c\cdot \int f(x)dx$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$.

**Ćwiczenie 2.** *Korzystając z twierdzenia o liniowości obliczyć podane całki nieoznaczone:*

*a)* $\int (x - 2e^x)dx$;

*b)* $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx$;

*c)* $\int \frac{x^2}{1 + x^2} dx$.

**Twierdzenie 3.** *(o całkowaniu przez podstawienie)*
*Jeżeli*
*1. funkcja* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest ciągła na przedziale* $(a, b)$*,*
*2. funkcja* $\varphi : (A, B) \to (a, b)$ *ma ciągłą pochodną na przedziale* $(A, B)$*, to*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$$

*gdzie* $F$ *jest dowolną funkcją pierwotną funkcji* $f$ *oraz* $C \in \mathbb{R}$*.*

**Ćwiczenie 3.** *Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki:*

*a)* $\displaystyle\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^{16}}}$;

*b)* $\displaystyle\int \cos^7 x dx$;

*c)* $\displaystyle\int \frac{e^{3x} dx}{1+e^{3x}}$;

*d)* $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}dx$;

*e)* $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

**Twierdzenie 4.** *(*o całkowaniu przez części*)*
*Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają ciągłe pochodne, to*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

**Ćwiczenie 4.** *Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć podane całki:*

*a)* $\int x \sin x dx$;

*b)* $\int x^2 e^{-x} dx$;

*c)* $\int \frac{xdx}{cos^2 x}$;

*d)* $\int x \arctan x dx$.

Z pracy egzaminacyjnej studentki:
”Całując przez części . . . otrzymałam".

**Definicja 3.** (*całka funkcji wymiernej*)
Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów. Całka funkcji wymiernej jest więc postaci:

$$\int \frac{W_1(x)}{W_2(x)}dx = \int \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}dx.$$

## Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Jeżeli $n \geqslant m$, to licznik dzielimy przez mianownik i funkcję podcałkową przedstawiamy jako sumę wielomianu oraz funkcji wymiernej właściwej, w której już stopień licznika jest mniejszy niż stopień mianownika ($n < m$).

2. Jeżeli $n < m$, to funkcję podcałkową rozkładamy na ułamki proste, tj. na wyrażenia postaci:

$$\frac{A}{(ax+b)^k} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx+C}{(cx^2+dx+e)^p},$$

gdzie $A, B, C, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ są stałe, przy czym $\Delta = d^2 - 4ce < 0$ (wyróżnik trójmianu $cx^2 + dx + e$ jest ujemny), a $k, p \in \mathbb{N}$.

**Twierdzenie 5.** *(*całka ilorazu pochodnej i funkcji*)*
*Jeżeli funkcja $f$ ma ciągłą pochodną, to*

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

**Ćwiczenie 5.** *Obliczyć podane całki funkcji wymiernych:*

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{x+2}dx$;

b) $\displaystyle\int \frac{x^2-4}{x-1}dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$;

d) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

e) $\displaystyle\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}dx$;

f) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4}dx$;

g) $\displaystyle\int \frac{6x^3+4x+1}{x^4+x^2}dx$.

Na egzaminie student przeprowadził następujące obliczenia:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x} = \frac{1}{\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2}}.$$

Na pytanie egzaminatora:

- Czy to na pewno jest dobrze?

Odpowiedział:

- Oczywiście, że nie. Brakuje jeszcze stałej całkowania.

## Całkowanie funkcji zawierających pierwiastki z wyrażenia liniowego

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną potęg zmiennej $x$ o wykładnikach postaci $\dfrac{m}{n}$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi, to wykonujemy podstawienie

$$x = t^N,$$

gdzie $N$ oznacza wspólny mianownik ułamków postaci $\dfrac{m}{n}$.

**Ćwiczenie 6.** *Obliczyć całkę*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Jeżeli funkcja podcałkowa jest funkcją wymierną zmiennej $x$ oraz potęg dwumianu $ax+b$ lub funkcji homograficznej

$$\frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{gdzie} \quad ad-bc \neq 0,$$

o wykładnikach w postaci $m/n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ są liczbami względnie pierwszymi, to w pierwszym wypadku wykonujemy podstawienie

$$ax+b = t^N,$$

a w drugim przypadku

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N,$$

gdzie $N$ oznacza wspólny mianownik ułamków postaci $m/n$.

**Ćwiczenie 7.** *Obliczyć podane całki:*

a) $\int \sqrt[4]{3x-7}dx$;

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4-5x}}dx$;

c) $\int x\sqrt{2x-10}dx$;

d) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1}$.

## Całkowanie funkcji zawierających pierwiastek kwadratowy z trójmianu kwadratowego

Całka funkcji, w której występują działania takie jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie i potęgowanie, wykonywane na zmiennych $x$ i $\sqrt{ax^2+bx+c}$, daje się zawsze wyrazić przez funkcje elementarne.

Podstawowymi całkami funkcji niewymiernych, do których wiele innych da się sprowadzić, są

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$$

oraz

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|} + C.$$

**Twierdzenie 6.** *(*całka ilorazu pochodnej i pierwiastka funkcji*)*
*Jeżeli funkcja $f$ ma ciągłą pochodną, to*

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C.$$

**Ćwiczenie 8.** *Obliczyć podane całki:*

*a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}}$;

*b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$;

*a)* $\displaystyle\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2+5x-10}}$.

## Metoda współczynników nieoznaczonych

Metodę współczynników nieoznaczonych stosujemy przy obliczaniu całek postaci:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

gdzie $W_n(x)$ jest wielomianem stopnia $n$. Metoda ta opiera się na następującym przewidywaniu:

$$\int \frac{W_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+A\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie $W_{n-1}(x)$ jest wielomianem stopnia $n-1$, a $A$ pewną stałą.

**Ćwiczenie 9.** *Oblicz podane całki:*

*a)* $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 22x^2 + 21x - 7}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}dx$;

*b)* $\displaystyle\int (3x - 2)\sqrt{x^2 - 2x}dx$;

## Ogólne metody sprowadzania całek trygonometrycznych do całek funkcji wymiernych

I. *Podstawienie uniwersalne* - $\tan \frac{x}{2} = t$. Rozważmy całkę typu

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x) dx,$$

gdzie symbol $R(u, v, w)$ oznacza funkcję wymierną względem zmiennych $u, v$ i $w$. Aby obliczyć całkę tego typu, wykonujemy podstawienie

$$\tan \frac{x}{2} = t, \qquad \text{skąd} \quad x = 2 \arctan t \text{ i } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Wyrażając funkcje danego kąta przez tangens połowy kąta otrzymujemy:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

**Ćwiczenie 10.** *Obliczyć podane całki:*

*a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

*b)* $\displaystyle\int \frac{2+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}$.

II. Rozważmy całkę typu

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)dx,$$

gdzie symbol $R(u, v, w)$ oznacza funkcję wymierną względem zmiennych $u, v$ i $w$. Można tu zastosować podstawienie uniwersalne, ale rachunki znacznie się upraszczają przy podstawieniu

$$\tan x = t, \qquad \text{skąd} \quad x = \arctan t \text{ i } dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Ze wzorów trygonometrycznych otrzymujemy:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

**Ćwiczenie 11.** *Obliczyć podane całki:*

*a)* $$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x};$$

*b)* $$\int \frac{1+\sin x\cos x}{(2+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}dx.$$

Fragment pracy egzaminacyjnej:

$$\int tgtdt = g \int t^2 dt = \frac{gt^3}{3} + C,$$

gdzie $g$ jest przyspieszeniem ziemskim, a $C$ dowolną stałą.