Równania różniczkowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Wykład (Inżynieria środowiska)

- Równania liniowe jednorodne
- Równania liniowe niejednorodne

Definicja 1. (*równanie drugiego rzędu o współczynnikach stałych*) Równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o współczynnikach stałych ma postać

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x), \qquad (a \neq 0).$$

Równanie to jest liniowe względem y i jej pochodnych, natomiast funkcja f zmiennej x może być dowolnej postaci, a litery a, b, c oznaczają dowolne stałe rzeczywiste.

Uwaga 1. Jeżeli $f(x) \equiv 0$, to równanie to nazywamy równaniem jednorodnym (lub uproszczonym), w przeciwnym przypadku nazywamy je równaniem niejednorodnym (lub w postaci ogólnej).

Twierdzenie 1. *(*o postaci rozwiązania równania liniowego rzędu drugiego o stałych współczynnikach*)*
Jeżeli znamy rozwiązanie ogólne $y_1(x, C_1, C_2)$ równania jednorodnego oraz jakieś rozwiązanie szczególne $y_2(x)$ równania niejednorodnego, to rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego wyraża się wzorem

$$y = y_1(x, C_1, C_2) + y_2(x).$$

Definicja 2. (*równanie charakterystyczne*)
Równaniem charakterystycznym, jednorodnego równania liniowego rzędu drugiego o stałych współczynnikach, nazywamy równanie postaci

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a \neq 0),$$

otrzymane z równania

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0, \qquad (a \neq 0),$$

przez podstawienie

$$y = e^{rx}.$$

Algorytm rozwiązania jednorodnego równania rzędu drugiego o stałych współczynnikach

Tworzymy równanie charakterystyczne:

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Równanie to może mieć dwa różne pierwiastki rzeczywiste, jeden pierwiastek podwójny lub dwa różne pierwiastki zespolone.

1. Jeżeli $\delta = b^2 - 4ac > 0$, to równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2, wówczas równanie różniczkowe jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

2. Jeżeli $\delta = b^2 - 4ac = 0$, to równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek podwójny r, wówczas równanie różniczkowe jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = (C_1 x + C_2)e^{rx}.$$

3. Jeżeli $\delta = b^2 - 4ac < 0$, to równanie charakterystyczne ma dwa różne pierwiastki zespolone $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_1 = \alpha - \beta i$, wówczas równanie różniczkowe jednorodne ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ćwiczenie 1. *Rozwiązać równania różniczkowe:*
a) $2y'' - 5y' - 3y = 0$,
b) $4y'' + 12y' + 9y = 0$,
c) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Uwaga 2. (*wyznaczanie rozwiązań szczególnych równań liniowych niejednorodnych drugiego rzędu*)
Zgodnie z twierdzeniem 1 rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego stopnia drugiego o stałych współczynnikach jest postaci:

$$CORN = CORJ + CSzRN.$$

Algorytm wyznaczania $CORJ$ został omówiony powyżej. Rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego ($CSzRN$) znajdujemy metodą przewidywań lub metodą uzmienniania stałej.

Ćwiczenie 2. *Rozwiązać równania:*
a) $y'' - 4y + 4y = 8x^3 - 36x$,
b) $y'' + 4y = \sin 3x$,
c) $y'' - y = 2x \cos x + e^x$ *przy warunkach początkowych* $x = 0$, $y = \dfrac{1}{2}, y' = 1$.