

# Całka oznaczona

## Streszczenie wykładu

- Całka Riemanna
- Interpretacja geometryczna
- Podstawowe twierdzenia
- Zastosowania geometryczne całek oznaczonych
- Całki niewłaściwe

**Definicja 1.** (*podział odcinka*)

Podziałem odcinka  $[a, b]$  na  $n$  części, gdzie  $n \in \mathbb{N}$ , nazywamy zbiór

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

przy czym  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

**Oznaczenia:**

Niech  $1 \leq k \leq n$ . Wtedy

$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$  - długość  $k$ -tego odcinka podziału  $\mathcal{P}$ ;

$\delta(\mathcal{P}) := \max \{\Delta x_k\}$  - średnica podziału  $\mathcal{P}$ ;

$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$  - punkt pośredni  $k$ -tego odcinka podziału  $\mathcal{P}$ .

**Definicja 2.** (*suma całkowa*)

Niech funkcja  $f$  będzie ograniczona na przedziale  $[a, b]$  oraz niech  $\mathcal{P}$  będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji  $f$  odpowiadającą podziałowi  $\mathcal{P}$  oraz punktom pośrednim  $x_k^*$ , tego podziału nazywamy liczbę

$$\sigma(f, \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k.$$

**Rysunek 1.** *Suma całkowa funkcji.*

**Definicja 3.** (*całka oznaczona Riemanna*)

Niech funkcja  $f$  będzie ograniczona na przedziale  $[a, b]$ . Całkę oznaczona Riemanna z funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$  definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k,$$

o ile powyższa granica jest właściwa i nie zależy od podziału  $\mathcal{P}$  oraz wyboru punktów pośrednich  $x_k^*$ .

*Uwaga 1.* Funkcję dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na  $[a, b]$  nazywamy funkcją całkowaną na  $[a, b]$ .

**Twierdzenie 1.** (Newtona-Leibniza, związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną)

*Jeżeli funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ , to*

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

*gdzie  $F$  oznacza funkcję pierwotną funkcji  $f$ .*

**Ćwiczenie 1.** *Oblicz podane całki:*

a)  $\int_{-1}^2 e^{-x} dx;$

b)  $\int_1^e \frac{dx}{x}.$

**Twierdzenie 2.** (o liniowości całki oznaczonej)

*Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  są całkowalne na przedziale  $[a, b]$ , to*

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

$$\int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad \text{gdzie } c \in \mathbb{R}.$$

**Twierdzenie 3.** (o addytywności całki względem przedziałów całkowania)

Jeżeli funkcja  $f$  jest całkowna na przedziale  $[a, b]$  oraz  $c \in [a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Rysunek 2.** Addytywność całki względem przedziałów całkowania.

**Ćwiczenie 2.** Oblicz

$$\int_{-1}^3 |x - 2| dx.$$

**Twierdzenie 4.** (o całkowaniu przez podstawienie)

*Jeżeli*

- 1. funkcja  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  ma ciągłą pochodną na przedziale  $[\alpha, \beta]$ ,*
  - 2.  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,*
  - 3. funkcja  $f$  jest ciągła na przedziale  $[a, b]$ ,*
- to*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

**Ćwiczenie 3.** *Oblicz podane całki:*

a)  $\int_0^2 xe^{x^2} dx;$       b)  $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$



**Twierdzenie 5.** (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne na przedziale  $[a, b]$ , to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

**Ćwiczenie 4.** Oblicz całki:

a)  $\int_1^e \ln^2 x dx;$

b)  $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x dx.$

**Twierdzenie 6.** (Interpretacja geometryczna całki oznaczonej)  
*Jeżeli na przedziale  $[a, b]$  jest  $f(x) \geq 0$ , to pole obszaru leżącego pod łukiem krzywej  $y = f(x)$  równe jest całce oznaczonej*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

*Jeżeli zaś na przedziale  $[a, b]$  jest  $f(x) \leq 0$ , to pole pod krzywą  $y = f(x)$  jest równe*

$$-\int_a^b f(x)dx.$$

*Ponadto*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{oraz} \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

**Ćwiczenie 5.** Oblicz pole ograniczone odcinkiem osi  $OX$  od  $x = -1$  do  $x = 1$ , rzędnymi w tych punktach oraz łukiem linii

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

**Ćwiczenie 6.** Oblicz pole ograniczone łukiem paraboli  $y^2 = 2x$  oraz prostą  $x = 8$ .

**Ćwiczenie 7.** Oblicz pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej  $y = x^3 + x^2 - 2x$ , odcinkiem osi  $OX$  oraz rzędnymi w punktach  $x = -2, x = 2$ .

**Ćwiczenie 8.** Oblicz pola figur ograniczonych krzywymi:

a)  $y = x^2 + 6x - 7, y = 1 - x;$

b)  $y = \sqrt{3} \cos x, y = \sin x \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right).$

**Twierdzenie 7.** (Obliczanie pól, gdy linia ograniczająca jest określona w postaci parametrycznej)

*Jeżeli dana krzywa jest określona równaniami w postaci parametrycznej*

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

*gdzie funkcje  $g(t)$  i  $h(t)$  są ciągłe w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_2$ , a przy tym funkcja  $g(t)$  jest rosnąca i ma w tym przedziale pochodną ciągłą, to pole obszaru ograniczonego łukiem danej krzywej, odcinkiem osi  $OX$  oraz prostymi  $x = x_1$ ,  $x = x_2$ , gdzie  $x_1 = g(t_1)$ ,  $x_2 = g(t_2)$ , wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt.$$

*Jeżeli przy tych samych założeniach funkcja jest malejąca w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_2$ , to pole obszaru wyraża się wzorem*

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |y| dx = - \int_{t_1}^{t_2} |h(t)| g'(t) dt.$$

**Ćwiczenie 9.** Obliczyć pole elipsy danej równaniami parametrycznymi

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t,$$

gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Ćwiczenie 10.** Obliczyć pole obszaru ograniczone odcinkiem osi  $OX$  i łukiem cykloidy określonej równaniami parametrycznymi

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Ćwiczenie 11.** Obliczyć pole asteroidy określonej równaniami

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t,$$

gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Twierdzenie 8.** (Obliczanie pól, gdy linia ograniczająca określona jest we współrzędnych biegunowych)

*Jeżeli krzywa dana jest we współrzędnych biegunowych*

$$r = f(\theta),$$

*gdzie  $f(\theta)$  jest funkcją nieujemną ciągłą w przedziale  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ , a przy tym  $0 < \beta - \alpha < 2\pi$ , to pole obszaru ograniczonego łukiem krzywej  $r = f(\theta)$  oraz promieniami wodzącymi o amplitudach  $\alpha$  i  $\beta$  wyraża się wzorem*

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta.$$



**Ćwiczenie 12.** Obliczyć pole lemniskaty Bernoulliego określonej równaniem

$$r = \sqrt{\cos 2\theta},$$

gdzie  $\theta$  przebiega przedziały  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$  i  $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$ .

**Ćwiczenie 13.** Obliczyć pole ograniczone rozetą trójkątną o równaniu

$$r = \sin 3\theta,$$

gdzie  $\theta$  przebiega przedziały  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ ,  $\frac{4\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$ .

**Twierdzenie 9.** (Długość krzywej)

Jeżeli krzywa wyznaczona jest równaniem postaci  $y = f(x)$ , przy czym funkcja  $f(x)$  ma w przedziale  $a \leq x \leq b$  ciągłą pochodną, to długość łuku krzywej w tym przedziale wyraża się wzorem

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

**Ćwiczenie 14.** Wyprowadź wzór na obwód koła o promieniu  $r$ .

**Ćwiczenie 15.** Obliczyć długości podanych krzywych:

a)  $y = \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ;

b)  $y = \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .

**Twierdzenie 10.** (Długość krzywej danej parametrycznie)  
*Jeżeli krzywa dana jest parametrycznie za pomocą równań*

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

*przy czym funkcje  $g(t)$  i  $h(t)$  mają w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_2$  ciągłe pochodne oraz łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem*

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

**Ćwiczenie 16.** *Obliczyć długość łuku asteroidy*

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t,$$

*gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ .*

**Ćwiczenie 17.** *Obliczyć długość łuku cykloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

*gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ .*

**Twierdzenie 11.** (Długość krzywej danej biegunowo)

*Jeżeli krzywa dana jest równaniem we współrzędnych biegunowych  $r = f(\theta)$ , przy czym funkcja  $f(\theta)$  ma w przedziale  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  ciągłą pochodną i łuk nie ma części wielokrotnych, to długość łuku wyraża się wzorem*

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

**Ćwiczenie 18.** *Obliczyć długość łuku spirali logarytmicznej*

$$r = e^{2\theta},$$

*gdzie parametr  $\theta$  zmienia się w przedziale  $0 \leq \theta \leq 6\pi$ .*

**Twierdzenie 12.** (Objętość bryły obrotowej)

*Niech nieujemna funkcja  $f$  będzie ciągła na przedziale  $[a, b]$ .*

*Wtedy objętość bryły obrotowej ograniczonej powierzchnią, która powstaje, gdy łuk krzywej o równaniu  $y = f(x)$  dla  $x \in [a, b]$  obraca się dookoła osi  $OX$ , wyraża się wzorem:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

**Ćwiczenie 19.** Wyprowadź wzór na objętość kuli o promieniu  $R$ .

**Ćwiczenie 20.** Oblicz objętości brył powstałych z obrotu podanych krzywych dookoła osi  $OX$ :

a)  $y = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq 1;$

b)  $y = \sqrt{x}e^{-x}, 0 \leq x \leq 4.$

**Twierdzenie 13.** (Objętość bryły obrotowej z łukiem danym parametrycznie)

*Niech dany będzie łuk  $AB$  krzywej określonej równaniami*

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

*przy czym funkcje  $g(t)$  i  $h(t)$  mają w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_2$  ciągłe pochodne, funkcja  $g(t)$  jest w tym przedziale stale rosnąca albo stale malejąca, a funkcja  $h(t)$  przybiera wartości nieujemne. Wówczas objętość bryły obrotowej, która powstaje, gdy łuk  $AB$  wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi  $OX$  wyraża się wzorem*

$$L = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2 \frac{dx}{dt} dt.$$



**Ćwiczenie 21.** *Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu cycloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

*gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ , dookoła osi  $OX$ .*

**Twierdzenie 14.** (Pole powierzchni obrotowej)

*Niech nieujemna funkcja  $f$  będzie różniczkowalna na przedziale  $[a, b]$ . Wtedy pole powierzchni obrotowej powstałej z obrotu krzywej o równaniu  $y = f(x)$  dla  $x \in [a, b]$  dookoła osi  $OX$ , wyraża się wzorem:*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**Ćwiczenie 22.** *Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu podanych krzywych dookoła osi  $OX$ :*

a)  $y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1;$

b)  $y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$

**Twierdzenie 15.** (Pole powierzchni obrotowej z łukiem danym parametrycznie)

*Niech dany będzie łuk  $AB$  krzywej określonej równaniami*

$$x = g(t), \quad y = h(t),$$

*przy czym funkcje  $g(t)$  i  $h(t)$  mają w przedziale  $t_1 \leq t \leq t_2$  ciągłe pochodne, funkcja  $g(t)$  jest w tym przedziale stale rosnąca albo stale malejąca, a funkcja  $h(t)$  przybiera wartości nieujemne. Wówczas pole powierzchni bryły obrotowej, która powstaje, gdy łuk  $AB$  wraz z rzędnymi w końcach łuku obraca się dookoła osi  $OX$  wyraża się wzorem*

$$L = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

**Ćwiczenie 23.** *Obliczyć pole powierzchni powstałej z obrotu cykloidy*

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t,$$

*gdzie parametr  $t$  przebiega przedział  $0 \leq t \leq 2\pi$ , dookoła osi  $OX$ .*

**Twierdzenie 16.** (całka niewłaściwa funkcji nieograniczonej)

Niech punkt  $c \in [a, b]$  będzie punktem nieograniczoności funkcji  $f$ . Jeżeli istnieją granice

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow c^-} \int_a^{\varepsilon} f(x) dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow c^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx,$$

to sumę tych granic nazywamy całką niewłaściwą funkcji nieograniczonej  $f$  na przedziale  $[a, b]$  i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x) dx.$$

*Uwaga 2.* Jeżeli któraś z powyższych granic nie istnieje, to mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

*Uwaga 3.* Jeżeli punktem nieograniczoności jest jeden z końców przedziału  $[a, b]$ , to przez całkę niewłaściwą rozumiemy odpowiednio:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow a^+} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx \quad \text{albo} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow b^-} \int_a^{\varepsilon} f(x) dx.$$

**Rysunek 3.** *Interpretacja geometryczna całki niewłaściwej.*

**Ćwiczenie 24.** Oblicz całki:

a)  $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$

b)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$



**Twierdzenie 17.** (całka na przedziale nieograniczonym)

Niech funkcja  $f$  będzie określona na przedziel  $[a, \infty]$ . Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_a^{\varepsilon} f(x) dx,$$

to granicę tę nazywamy całką niewłaściwą funkcji  $f$  na przedziale  $[a, \infty]$  i oznaczamy symbolem

$$\int_a^{\infty} f(x) dx.$$

Uwaga 4. Analogicznie określa się znaczenie symbolu  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

jako granicę  $\lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \int_{\varepsilon}^b f(x) dx.$

**Ćwiczenie 25.** Oblicz podane całki:

a)  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx;$

b)  $\int_1^{\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 dx;$

c)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\arctan x)^2 dx}{1 + x^2}.$