Programowanie liniowe

Algorytm transportowy **III**

- Domykanie otwartego zadania transportowego

SPROWADZANIE OTWARTEGO ZADANIA TRANSPORTOWEGO DO ZADANIA ZAMKNIĘTEGO

1. Podaż większa niż popyt.

Rozważmy następujące zadanie transportowe:

	20	30	20
50	5	3	8
70	2	9	1

W tym przykładzie podaż: $\sum_{i=1}^{2} a_i = 120$ jest większa od popytu: $\sum_{j=1}^{3} b_j = 70$. Takie zadanie nazywamy zadaniem otwartym.

Algorytm transportowy działa tylko wtedy, gdy zadanie jest zamknięte. Należy więc wyjściowe zadanie otwarte sprowadzić do równoważnego mu zadania zamkniętego.

Robi się to wprowadzając tzw. fikcyjnego odbiorcę zgłaszającego zapotrzebowanie na nadmiar podaży. Jeżeli nie ma żadnych dodatkowych warunków przyjmujemy, że jednostkowe koszty transportu do fikcyjnego odbiorcy wynoszą zero. Otrzymujemy tablicę do której można już zastosować algorytm transportowy:

	20	30	20	50
50	5	3	8	0
70	2	9	1	0

Początkowe rozwiązanie wyznaczymy metoda kata N-W:

	20	30	20	50	u_i
50	5^{20}	3^{30}	8^{0}	0	3
70	2	9	1^{20}	0^{50}	-4
v_j	2	0	5	4	

Otrzymana poniżej tablica kosztów zastępczych pokazuje, że nie jest to rozwiązanie optymalne. Dokonujemy więc przesunięcia przewozów wzdłuż zaznaczonej pętli:

	0^{20}	0^{30}	0^{0-t}	-7^{t}
	4	13	0^{20+t}	0^{50-t}

Możemy przesunąć maksymalnie $t = 0$ jednostek.

Otrzymujemy kolejną tablicę, która po utworzeniu tablicy kosztów zastępczych, okazuje się być nieoptymalną. Mamy

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & & & u_i \\
\hline
 & 0^{20} & 0^{30} & 0^{\mathsf{x}} & -7^{0} & 0 \\
 & 4 & 13 & 0^{20} & 0^{50} & 7 \\
\hline
v_j & 0 & 0 & -7 & -7 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 0^{20-t} & 0^{30} & 7 & 0^{0+t} \\
 & -3^{t} & 6 & 0^{20} & 0^{50-t}
\end{array}
$$

Tym razem możemy przesunąć wzdłuż pętli $t = 20$ jednostek.

Dostajemy tablicę, która okazuje się być optymalna. Mamy

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & & & & & u_i \\
\hline
 & 0^{\times} & 0^{30} & 7 & 0^{20} & 0 \\
 & -3^{20} & 6 & 0^{20} & 0^{30} & 0 \\
\hline
v_j & -3 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{c|cccc}
 & & & & \\
\hline
 & 3 & 0 & 7 & 0 \\
 & 0 & 6 & 0 & 0
\end{array}
$$

Jeżeli teraz wykreślimy dopisaną kolumnę, to otrzymamy rozwiązanie optymalne dla problemu wyjściowego:

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 20 & 30 & 20 \\
\hline
50 & 5 & 3^{30} & 8 \\
70 & 2^{20} & 9 & 1^{20}
\end{array}
$$

2. Podaż mniejsza niż popyt.

Podobnie możemy rozwiązać problem w którym suma dostaw jest mniejsza niż suma zapotrzebowań. Rozważmy następujące zadanie transportowe:

	20	20	20
10	3	1	5
20	2	9	6
15	1	4	2

W tym przykładzie podaż: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 45$ jest mniejsza od popytu: $\sum_{j=1}^{3} b_j = 60$. Tak jak poprzednie, jest to zadanie otwarte.

Dodajemy fikcyjnego dostawcę o wielkości dostaw: $a_4 = 15$ i jednostkowych kosztach transportu równych zero do wszystkich odbiorców, co domyka problem. Pierwsze rozwiązanie dopuszczalne wyznaczamy metodą minimalnego elementu. Dostajemy

$$
\begin{array}{c|ccc|r}
 & 20 & 20 & 20 & u_i \\
\hline
10 & 3 & 1^{10} & 5 & -6 \\
20 & 2^{5} & 9^{10} & 6^{5} & 2 \\
15 & 1^{15} & 4 & 2 & 1 \\
15 & 0 & 0 & 0^{15} & -4 \\
\hline
v_j & 0 & 7 & 4 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\
\hline
 & 9 & 0^{10} & 7 \\
 & 0^{5+t} & 0^{10-t} & 0^{5} \\
 & 0^{15-t} & -4^{t} & -3 \\
 & 4 & -3 & 0^{15}
\end{array}
$$

Możemy przesunąć wzdłuż pętli maksymalnie $t = 10$ jednostek.

Otrzymujemy kolejną tablicę, która po utworzeniu tablicy kosztów zastępczych okazuje się być nieoptymalną. Mamy

$$
\begin{array}{c|ccc|r}
 & & & & u_i \\ \hline
 & 9 & 0^{10} & 7 & 0 \\
 & 0^{15} & 0^{\times} & 0^{5} & -4 \\
 & 0^{5} & -4^{10} & -3 & -4 \\
 & 4 & -3 & 0^{15} & -4 \\ \hline
v_j & 4 & 0 & 4 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\ \hline
 & 5 & 0^{10} & 3 \\
 & 0^{15+t} & 4 & 0^{5-t} \\
 & 0^{5-t} & 0^{10} & -3^{t} \\
 & 4 & 1 & 0^{15}
\end{array}
$$

Teraz możemy przesunąć wzdłuż pętli maksymalnie $t = 5$ jednostek.

Otrzymujemy kolejną tablicę, która po utworzeniu tablicy kosztów zastępczych również okazuje się być nieoptymalną. Mamy

$$
\begin{array}{c|ccc|r}
 & & & & u_i \\
\hline
 & 5 & 0^{10} & 3 & -3 \\
 & 0^{20} & 4 & 0^{0} & 0 \\
 & 0^{\times} & 0^{10} & -3^{5} & -3 \\
 & 4 & 1 & 0^{15} & 0 \\
\hline
v_j & 0 & 3 & 0 &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{c|ccc}
 & & & \\
\hline
 & 8 & 0^{10} & 6 \\
 & 0^{20} & 1 & 0^{0} \\
 & 3 & 0^{10-t} & 0^{5+t} \\
 & 4 & -2^{t} & 0^{15-t}
\end{array}
$$

Możemy przesunąć maksymalnie $t = 10$ jednostek.

Otrzymujemy tablicę, która jest w postaci optymalnej. Mamy

				u_i
	8	0^{10}	6	0
	0^{20}	1	0^{0}	-2
	3	0^{x}	0^{15}	-2
	4	-2^{10}	0^{5}	-2
v_j	2	0	2	

$\longrightarrow$

	6	0	4
	0	3	0
	3	2	0
	4	0	0

Podobnie jak poprzednio, po skreśleniu dopisanego wiersza, otrzymujemy rozwiązanie optymalne dla problemu wyjściowego:

	20	20	20
10	3	1^{10}	5
20	2^{20}	9	6^{0}
15	1	4	2^{15}