Rozwiązywanie równań nieliniowych

Wykład 2

- Pierwiastki wielomianów

- Wzór Taylora i jego warianty

- Układy równań nieliniowych

Pierwiastki wielomianów

Wszystkie metody opisane wcześniej możemy zastosować do wielomianów. Warto jednak uwzględnić specjalną strukturę tych funkcji. Wielomianem nazywamy funkcję postaci

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,$$

gdzie współczynniki a_k i zmienna z mogą być zespolone. Stopniem wielomianu nazywamy wykładnik najwyższej potęgi, tzn. jeżeli $a_n \neq 0$, to p ma stopnień n.

Zasadniczym pytaniem przy poszukiwaniu pierwiastków wielomianów jest czy one istnieją i jeżeli istnieją, to w jakiej liczbie. Odpowiedz daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1. *Wielomian stopnia n ma dokładnie n pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej, przy czym każdy z nich liczony jest tyle razy, ile wynosi jego krotność.*

Przy poszukiwaniu pierwiastków wielomianów warto wiedzieć, jak z grubsza są one rozmieszczone na płaszczyźnie zespolonej. Odpowiedz daje twierdzenie lokalizacyjne.

Twierdzenie 2. *Wszystkie pierwiastki wielomianu stopnia n leżą w kole otwartym o środku w punkcie* 0 *płaszczyzny zespolonej i promieniu*

$$\rho = 1 + \frac{\max_{0 \leqslant k < n} |a_k|}{|a_n|}.$$

Ćwiczenie 1. *Znaleźć koło o środku w punkcie* 0, *zawierające wszystkie pierwiastki wielomianu*

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 5z - 2.$$

Podobną informację o lokalizacji pierwiastków wielomianu uzyskujemy korzystając z funkcji

$$s(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \cdots + a_0 z^n,$$

tzn. wielomianu stopnia nie większego od n, o współczynnikach takich jak w p, ale uporządkowanych odwrotnie. Dla różnej od zera liczby zespolonej z_0 warunki $p(z_0)$ i $s\left(\frac{1}{z_0}\right)$ są równoważne. Wynika stąd następujący wniosek.

Twierdzenie 3. *Jeżeli wszystkie pierwiastki wielomianu s leżą w kole $|z| < \rho$, to wszystkie niezerowe pierwiastki wielomianu p leżą poza kołem $|z| \leqslant \frac{1}{\rho}$.*

Ćwiczenie 2. *Znaleźć koło o środku w punkcie 0, w którym wielomian*

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 7z^2 - 5z - 2$$

nie ma żadnego pierwiastka.

Wzór Taylora i jego warianty

Wzór ten dotyczy funkcji z $C^n[a,b]$. Posługujemy się nim bardzo często w analizie numerycznej.

Twierdzenie 4. *Jeśli* $f \in C^n[a,b]$ *i jeśli* $f^{(n+1)}$ *istnieje w przedziale otwartym* (a,b), *to dla dowolnych punktów* c *i* x *z przedziału domkniętego* $[a,b]$ *mamy*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + E_n(x),$$

gdzie dla pewnego punktu ξ *leżącego między* c *i* x

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-c)^{n+1}.$$

Wyrażenie $E_n(x)$ nazywamy *resztą Lagrange'a* wzoru Taylora. Zwrot „leżenia pomiędzy" użyty powyżej należy rozumieć tak, że albo $c < \xi < x$, albo $x < \xi < c$, w zależności od wartości c i x.

Dla $c = 0$ powyższy wzór nazywamy *wzorem Macalurina*.

Ćwiczenie 3. *Podać wzór Taylora dla*

$$f(x) = \ln x$$

przyjmując $a = 1, b = 2, c = 1$.

Ważny wariant wzoru Taylora można otrzymać zmieniając x na $x+h$ oraz c na x.

Twierdzenie 5. *Dla funkcji $f \in C^{n+1}[a,b]$ oraz dowolnych punktów x i $x+h$ z przedziału domkniętego $[a,b]$ mamy*

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + E_n(h),$$

gdzie dla pewnego ξ leżącego między x i $x+h$

$$E_n(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)(\xi)}.$$

Stosując powyższy wzór Taylora możemy wyprowadzić metodę Newtona. Niech f będzie funkcją, której pierwiastki chcemy wyznaczyć numerycznie. Oznaczmy przez α taki pierwiastek, a przez x jego przybliżenie. Jeśli f'' istnieje, to ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$0 = f(\alpha) = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + E_1(h),$$

gdzie $h = \alpha - x$. Jeżeli h jest małe (tzn. jeżeli x jest bliskie α), to resztę $E_1(h)$ możemy pominąć. Dostajemy wtedy równanie

$$f(x) + hf'(x) = 0,$$

które rozwiązujemy względem h i otrzymujemy

$$h = -\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Jeśli x jest przybliżeniem pierwiastka α, to jeszcze lepszym przybliżeniem tego pierwiastka jest

$$x + h = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Startując od przybliżenia x_0 pierwiastka α w pierwszym kroku dostajemy

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Powtarzając to rozumowanie w drugim kroku otrzymujemy

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

i ogólnie

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (n \geqslant 0).$$

Podamy teraz wariant wzoru Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Twierdzenie 6. *Jeśli funkcja f należy do $C^{n+1}([a,b]\times[c,d])$ i jeśli punkty (x,y) i $(x+h,y+k)$ leżą w prostokącie $[a,b]\times[c,d]\subseteq\mathbb{R}^2$, to*

$$f(x+h,y+k)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{i}f(x,y)+E_n(h,k),$$

gdzie

$$E_n(h,k)=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k)\quad(0<\theta<1).$$

Układy równań nieliniowych

Stosując do układów równań, pomysł prowadzący do metody Newtona dla jednego równania, możemy otrzymać iteracyjną metodę numerycznego rozwiązywania układów nieliniowych. Wyprowadzenie tej metody pokażemy na przykładzie układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0. \end{cases}$$

Pomysł polega na lineryzacji tych równań, (tzn. zastosowaniu wzoru Taylora, przy użyciu tylko liniowych członów rozwinięcia) a następnie rozwiązaniu układu w celu obliczenia poprawek.

Jeżeli (x_1, x_2) jest przybliżonym rozwiązaniem układu, to $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)$, gdzie h_1, h_2 są obliczonymi poprawkami, powinno być jeszcze lepszym przybliżeniem. Ze wzoru Taylora dostajemy

$$\begin{cases} 0 = f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_1(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \\ 0 = f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \approx f_2(x_1, x_2) + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Pochodne cząstkowe występujące w tym układzie są obliczane w punkcie (x_1, x_2).

Otrzymujemy stąd układ

$$\begin{cases} h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -f_1(x_1, x_2), \\ h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -f_2(x_1, x_2), \end{cases}$$

który jest liniowy względem h_1 i h_2. Możemy zapisać go w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Macierzą główną tego układu jest *jacobian*

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

Możemy więc zapisać

$$J\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}.$$

Jeżeli macierz J jest nieosobliwa, to rozwiązanie układu istnieje i jest postaci

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = -J^{-1}\begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix}.$$

Metoda Newtona dla układu dwóch równań nieliniowych startuje od pierwszego przybliżenia rozwiązania $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ i w pierwszym kroku prowadzi do

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(0)} \\ h_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

W ogólnym przypadku dostajemy

$$\begin{bmatrix} x_1^{(n+1)} \\ x_2^{(n+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^{(n)} \\ h_2^{(n)} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} h_1^{(n)} \\ h_2^{(n)} \end{bmatrix} = -J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\ f_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \end{bmatrix}.$$

Kryterium stopu

Obliczenia kończymy kiedy największa z różnic między kolejnymi iteracjami, dla każdej składowej, będzie odpowiednio mała, np. dla powyższego układu może to być

$$\max_{i=1,2}\left|x_i^{(n)} - x_i^{(n-1)}\right| \leqslant 10^{-12}.$$

Ćwiczenie 4. *Rozwiązać metodą Newtona układ równań*

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + \frac{1}{9}e^{-x_1} = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + \frac{1}{9}e^{-x_2} = 0, \end{cases}$$

rozpoczynając od punktu $(1, 1)$, *z dokładnością do* 10^{-12}.

Ćwiczenie 5. *Rozwiązać metodą Newtona układ równań*

$$\begin{cases} xy = z^2 + 1 \\ xyz + y^2 = x^2 + 2 \\ e^x + z = e^y + 3, \end{cases}$$

dla punktu początkowego $(1, 1, 1)$, *z dokładnością do* 10^{-10}.