Układy równań liniowych

Wykład

- Podstawowe wiadomości
- Układy kwadratowe
- Układy niekwadratowe

Definicja 1. (*układ równań liniowych*)
Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dotfill \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$.

Definicja 2. (*rozwiązanie układu równań*)
Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Definicja 3. (*układ sprzeczny, oznaczony i nieoznaczony*)
Rozpatrzmy dowolny układ równań liniowych. Zachodzi jedna
z trzech możliwości:

1. Zbiór rozwiązań jest zbiorem pustym. Układ taki nazywamy układem sprzecznym.

2. Zbiór rozwiązań zawiera dokładnie jeden element. Układ taki nazywamy układem oznaczonym.

3. Zbiór rozwiązań zawiera nieskończenie wiele elementów. Układ taki nazywamy układem nieoznaczonym.

Definicja 4. (*postać macierzowa układu równań*)
Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B,$$

gdzie

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywamy macierzą współczynników lub macierzą główną układu, macierz X - macierzą niewiadomych, macierz B - macierzą wyrazów wolnych.

Ćwiczenie 1. *Podane układy równań zapisać w postaci macierzowej:*

a) $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 5 \\ 7x_1 - 4x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \quad ;$$

b) $$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3y - 2z = 0 \\ x + t = 3 \\ x + z - 3u = -5 \end{cases} \quad .$$

Definicja 5. (*układ Cramera**)
Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych

$$AX = B,$$

w którym A jest kwadratową macierzą nieosobliwą.

*Gabriel Cramer (1704-1752) - matematyk szwajcarski.

Twierdzenie 1. *(*wzory Cramera*)*
Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie określone wzorami:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det A} \\ x_2 = \dfrac{\det A_2}{\det A} \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{\det A_n}{\det A}, \end{cases}$$

gdzie A_j dla $1 \leqslant j \leqslant n$ jest macierzą uzyskaną z macierzy A przez zastąpienie w niej j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

Ćwiczenie 2. *Rozwiązać układy równań:*

a) $$\begin{cases} x + 5y = 2 \\ -3x + 6y = 15 \end{cases} \quad ;$$

b) $$\begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ x - 2y + 5z = 4 \\ x + y + z = 8 \end{cases} \quad .$$

Definicja 6. (*macierz uzupełniona*)
Macierzą uzupełnioną nazywamy macierz powstałą z macierzy A przez dołączenie kolumny wyrazów wolnych. Macierz uzupełnioną oznaczamy przez U.

Twierdzenie 2. *(*Kroneckera*-Capelliego†*)*
Układ równań liniowych ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej układu, tzn.

$$rzA = rzU.$$

*Leopold Kronecker (1827-1891) - matematyk niemiecki.
†Alfredo Capelli (1855-1910) - matematyk włoski

Twierdzenie 3. (wniosek z tw. Kroneckera-Capelliego)
1. *Jeżeli* $rzA = rzU = n$*, gdzie* n *oznacza liczbę niewiadomych, to układ jest oznaczony.*
2. *Jeżeli* $rzA = rzU < n$*, to układ jest nieoznaczony.*
3. *Jeżeli* $rzA \neq rzU$*, to układ jest sprzeczny.*

Ćwiczenie 3. *Rozwiązać podane układy równań:*

a) $$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases} \quad ;$$

b) $$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases} \quad ;$$

c) $$\begin{cases} x - y - 2z + 2t = -2 \\ 5x - 3y - z + t = 3 \\ 2x + y - z + t = 1 \\ 3x - 2y + 2z - 2t = -4 \end{cases} \quad .$$